Dr Marina Lj. Milovanović
MSc Zorica D. Milovanović

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA ZA PRIPREMU PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE

DRUGO DOPUNJENO IZDANJE

Beograd, 2011.

SADRŽAJ:

I ALGEBARSKI IZRAZI

Izrazi u kojima se pojavljuju konstante i promenljive, ali i njihovi zbirovi, razlike, proizvodi i količnici nazivaju se ***algebarski izrazi***.

Za izraze A, B, C, D važe sledeći **zakoni**:

(1) ***Distributivni zakon***

$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

$A\cdot(B-C)=A\cdot B-A\cdot C$

$(A+B)\cdot(C+D)=A\cdot C+A\cdot D+B\cdot C+B\cdot D$

(2) ***Razlika kvadrata***

$A^2-B^2=(A-B)\cdot(A+B)$

(3) ***Kvadrat binoma***

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

1. Dati su polinomi $P(x)=x^3+2x^2-1$ i $Q(x)=x^2+x+1$. Odrediti polinome:

a) $P(x)+Q(x)$

b) $P(x)-Q(x)$

c) $P(x)\cdot Q(x)$

Rešenje:

a) $P(x)+Q(x)=x^3+2x^2-1+x^2+x+1=$

$=x^3+(2x^2+x^2)+x+(-1+1)=x^3+3x^2+x$

b) $P(x)-Q(x)=x^3+2x^2-1-(x^2+x+1)=$

$=x^3+2x^2-1-x^2-x-1=x^3+(2x^2-x^2)-x+(-1-1)=$

$=x^3+x^2-x-2$

c) $P(x)\cdot Q(x)=(x^3+2x^2-1)\cdot(x^2+x+1)$

$=x^3x^2+x^3x+x^3+2x^2x^2+2x^2x+2x^2-x^2-x-1$

$=x^5+x^4+x^3+2x^4+2x^3+2x^2-x^2-x-1$

$=x^5+(x^4+2x^4)+(x^3+2x^3)+(2x^2-x^2)-x-1$

$=x^5+3x^4+3x^3+x^2-x-1$

2. Odrediti parametre a,b,c tako da su polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ identično jednaki:

a) $P(x)=2x^3-9x^2+13x-6$ i $Q(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$

b) $P(x)=2x^3-x^2+x+4$ i $Q(x)=(x+2)(ax^2+bx+c)$

Rešenje:

a) Dva polinoma su identično jednaka ako su koeficijenti uz odgovarajuće stepene jednaki.

$P(x)=2x^3-9x^2+13x-6$

$Q(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$

$=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$

$=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

$P(x)=Q(x)\Leftrightarrow$

$2x^3-9x^2+13x-6=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c\Leftrightarrow$

$2=a$

$-9=b-2a$

$13=c-2b$

$-6=-2c$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo sledeće:

$a=2,\ b=\text{-}5,\ c=3$

b) $P(x)=2x^3-x^2+x+4$

$Q(x)=(x+2)(ax^2+bx+c)$

$=ax^3+bx^2+cx+2ax^2+2bx+2c$

$=ax^3+(b+2a)x^2+(c+2b)x+2c$

$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow$

$$2x^3 - x^2 + x + 4 = ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c \Leftrightarrow$$

$$2 = a$$

$$-1 = b + 2a \Rightarrow b = -5$$

$$1 = c + 2b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$4 = 2c \Rightarrow c = 2$$

Ovaj sistem nema rešenje, pa je nemoguće da dati polinomi budu jednaki.

3. Odrediti kvadrat izraza:

a) $(3xy - 4)$

b) $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$

Rešenje:

Koristeći formulu za kvadrat binoma dobijamo sledeće:

a) $(3xy-4)^2 = (3xy)^2 - 2\cdot 3xy \cdot 4 + 4^2 = 9x^2y^2 - 24xy + 16$

b) $(a\sqrt{2} + b\sqrt{3})^2 = (a\sqrt{2})^2 + 2a\sqrt{2}\cdot b\sqrt{3} + (b\sqrt{3})^2$

$= 2a^2 + 2\sqrt{6}ab + 3b^2$

4. Skratiti razlomke:

a) $\dfrac{a(x+2)^2}{2a^2(x+2)}$

b) $\dfrac{a^2-9}{ab+3b-a-3}$

Rešenje:

a) $\dfrac{a(x+2)^2}{2a^2(x+2)} = \dfrac{a(x+2)^{\cancel{2}}}{2a^2\cancel{(x+2)}} = \dfrac{\cancel{a}(x+2)}{2a^{\cancel{2}}} = \dfrac{(x+2)}{2a}$

$x \neq -2, a \neq 0$

b) $\dfrac{a^2-9}{ab+3b-a-3}=\dfrac{(a-3)(a+3)}{(ab-a)+(3b-3)}=\dfrac{(a-3)(a+3)}{a(b-1)+3(b-1)}$

$=\dfrac{(a-3)\cancel{(a+3)}}{\cancel{(a+3)}(b-1)}=\dfrac{(a-3)}{(b-1)},\ a\neq -3,\ b\neq 1$

5. Uprostiti racionalne izraze:

a) $\dfrac{x-3}{x-5}-\dfrac{x+3}{x-5}$

b) $\dfrac{16x-x^2}{x^2-4}+\dfrac{3+2x}{2-x}-\dfrac{2-3x}{x+2}$

Rešenje:

a) $\dfrac{x-3}{x-5}-\dfrac{x+3}{x-5}=\dfrac{x-3-x-3}{x-5}=\dfrac{6}{5-x}$

b) $\dfrac{16x-x^2}{x^2-4}+\dfrac{3+2x}{2-x}-\dfrac{2-3x}{x+2}$

$=\dfrac{16x-x^2}{(x-2)(x+2)}+\dfrac{3+2x}{2-x}-\dfrac{2-3x}{x+2}=$

$=\dfrac{16x-x^2-(3+2x)(x+2)-(2-3x)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{16x-x^2-(3x+6+2x^2+4x)-(2x-4-3x^2+6x)}{(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{16x\cancel{-x^2}-3x-6\cancel{-2x^2}-4x-2x+4+\cancel{3x^2}-6x}{(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\dfrac{1}{x+2},\ x\neq \pm 2$

6. Uprostiti izraze:

a) $\dfrac{a^2-ab}{a^2+ab}\cdot\dfrac{a^2b+ab^2}{ab}$

b) $\dfrac{4x^2y^2}{15b^3c}:\dfrac{8x^3y^3}{5c^2b^2}$

Rešenje:

a) $\dfrac{a^2-ab}{a^2+ab}\cdot\dfrac{a^2b+ab^2}{ab}=\dfrac{\cancel{a}(a-b)}{\cancel{a}\,\cancel{(a+b)}}\cdot\dfrac{\cancel{ab}\,\cancel{(a+b)}}{\cancel{ab}}=a-b,\ ab\neq 0, a\neq -b$

b) $\dfrac{4x^2y^2}{15b^3c}:\dfrac{8x^3y^3}{5c^2b^2}=\dfrac{4\cancel{x^2}\,\cancel{y^2}}{15b^3c}\cdot\dfrac{5c^2b^2}{8x^{\cancel{3}}y^{\cancel{3}}}$

$=\dfrac{\cancel{4}}{\cancel{15}_3 b^{\cancel{3}}\cancel{c}}\cdot\dfrac{\cancel{5}c^{\cancel{2}}\cancel{b^2}}{\cancel{8}_2 xy}=\dfrac{c}{6bxy},\quad b,c,x,y\neq 0$

7. Uprostiti racionalni izraz:

$$\frac{a^2-a-6}{a^2-4}-\frac{a-1}{2-a}-2$$

Rešenje:

$$\frac{a^2-a-6}{a^2-4}-\frac{a-1}{2-a}-2=\frac{a^2-a-6}{(a-2)(a+2)}-\frac{a-1}{2-a}-2$$

$$=\frac{a^2-a-6+(a-1)(a+2)-2(a^2-4)}{(a-2)(a+2)}$$

$$=\frac{a^2-a-6+(a^2+2a-a-2)-2a^2+8}{(a-2)(a+2)}=$$

$$=\frac{\cancel{a^2}\cancel{-a}\cancel{-6}+\cancel{a^2}+\cancel{2a}\cancel{-a}\cancel{-2}\cancel{-2a^2}+\cancel{8}}{(a-2)(a+2)}$$

$$=\frac{0}{(a-2)(a+2)}=0,\ a\neq\pm 2$$

II LINEARNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

Linearna jednačina po x je svaka jednačina sa nepoznatom x koja se ekvivalentnim transformacijama svodi na jednačinu oblika $a \cdot x = b$, gde su a, b dati realni brojevi.

(1) Ako je $a \neq 0$ dobijamo ekvivalentnu jednačinu koja ima ***jedinstveno rešenje***:

$$x = \frac{b}{a}.$$

(2) Ako je $a = 0 \wedge b \neq 0$ jednačina nema rešenje. Za takvu jednačinu kažemo da je ***nemoguća***.

(3) Ako je $a = 0 \wedge b = 0$ svaki realan broj je rešenje jednačine. Za takvu jednačinu kažemo da je ***neodređena***.

Jednačina $\frac{A}{B} = 0$ ekvivalentana je sledećem: $A=0 \wedge B \neq 0$.

Linearna nejednačina po x je nejednačina koja se ekvivalentnim transformacijama svodi na neki od oblika: $a \cdot x < b,\ a \cdot x \leq b,\ a \cdot x > b,\ a \cdot x \geq b$, gde su a, b dati realni brojevi.

Nejednačina oblika $\frac{A}{B} < 0$ je ekvivalentna sledećem: $(A > 0 \wedge B < 0) \vee (A < 0 \wedge B > 0)$.

Nejednačina oblika $\frac{A}{B} > 0$ je ekvivalentna sledećem: $(A > 0 \wedge B > 0) \vee (A < 0 \wedge B < 0)$.

Napomena: Posebno treba obratiti pažnju na zapisivanje skupa rešenja nejednačina.

8. Koristeći ekvivalenciju $\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A=0 \wedge B \neq 0$ rešiti jednačinu:

a) $\frac{x-3}{x+1} = 0$

b) $\frac{6x-1}{2+x} = 3$

Rešenje:

a) $\dfrac{x-3}{x+1}=0 \Leftrightarrow \; x-3=0 \wedge x+1\neq 0 \;\Leftrightarrow\; x=3 \wedge x\neq -1$

b) $\dfrac{6x-1}{2+x}=3$

$$\frac{6x-1}{2+x}-3=0 \Leftrightarrow \frac{6x-1-6-3x}{2+x}=0 \Leftrightarrow \frac{3x-7}{2+x}=0$$

$$\frac{3x-7}{2+x}=0 \Leftrightarrow 3x-7=0 \wedge 2+x\neq 0 \Leftrightarrow 3x=7 \wedge x\neq -2 \quad \Leftrightarrow x=\frac{7}{3} \wedge x\neq -2$$

9. Rešiti jednačinu:

$$\frac{9x+1}{4x-3}-3=\frac{1-x}{20x-15}+\frac{2x+5}{4x-3}$$

Rešenje:

$$\frac{9x+1}{4x-3}-3=\frac{1-x}{20x-15}+\frac{2x+5}{4x-3}$$

$$\frac{9x+1-12x+9}{4x-3}=\frac{1-x}{5(4x-3)}+\frac{2x+5}{4x-3}$$

$$\frac{-3x+10}{4x-3}=\frac{1-x+5(2x+5)}{5(4x-3)} \Leftrightarrow \frac{-3x+10}{4x-3}=\frac{1-x+10x+25}{5(4x-3)}$$

$$\frac{-3x+10}{4x-3}=\frac{9x+26}{5(4x-3)}$$

$$\frac{-3x+10}{4x-3}-\frac{9x+26}{5(4x-3)}=0 \Leftrightarrow \frac{5(-3x+10)-9x-26}{5(4x-3)}=0$$

$$\frac{-15x+50-9x-26}{5(4x-3)}=0 \Leftrightarrow \frac{-24x+24}{5(4x-3)}=0$$

$$\frac{-24x+24}{5(4x-3)}=0 \Leftrightarrow -24x+24=0 \wedge 5(4x-3)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow -24x=-24 \wedge 4x-3\neq 0$$

$$x=1 \wedge 4x\neq 3 \Leftrightarrow x=1 \wedge x\neq \frac{3}{4}$$

10. Rešiti jednačinu:

$$\frac{1+3x}{3x-1}+\frac{1-3x}{1+3x}=\frac{12}{1-9x^2}$$

Rešenje:

$$\frac{1+3x}{3x-1}+\frac{1-3x}{1+3x}=\frac{12}{1-9x^2}$$

$$\frac{1+3x}{3x-1}+\frac{1-3x}{1+3x}=\frac{12}{(1-3x)(1+3x)} \quad /(1-3x)(1+3x)\neq 0$$

$$-(1+3x)^2+(1-3x)^2=12$$

$$\cancel{-1}-6x\cancel{-9x^2}+\cancel{1}-6x+\cancel{9x^2}=12$$

$$-12x=12$$

$$x=-1$$

11. Rešiti nejednačinu:

$$\frac{x-1}{x-2}<\frac{3}{2}$$

Rešenje:

$$\frac{x-1}{x-2}<\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{x-1}{x-2}-\frac{3}{2}<0$$

$$\frac{2(x-1)-3(x-2)}{2(x-2)}<0\Leftrightarrow\frac{2x-2-3x+6}{2(x-2)}<0$$

$$\frac{-x+4}{2(x-2)}<0$$

$$\frac{A}{B}<0\Leftrightarrow(A>0\wedge B<0)\ \vee(A<0\wedge B>0)$$

$$\frac{-x+4}{2(x-2)}<0\Leftrightarrow(-x+4>0\ \wedge 2(x-2)<0)\ \vee(-x+4<0\ \wedge 2(x-2)>0)$$

$$\Leftrightarrow(-x>-4\wedge x<2)\ \vee(-x<-4\wedge x>2)$$

$$\Leftrightarrow(x<4\wedge x<2)\vee(x>4\wedge x>2)$$

$x < 4 \wedge x < 2 \Rightarrow x < 2\,,\quad x > 4 \wedge x > 2 \Rightarrow x > 4$

Konačno rešenje: $x < 2 \vee x > 4$ tj. $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$.

12. Rešiti datu konjukciju (sistem):

$$2x + 3 \geq x + 1 \quad \wedge \quad x + 3 \geq 2x - 6$$

Rešenje:

$$2x + 3 \geq x + 1 \quad \wedge \quad x + 3 \geq 2x - 6$$

$$2x - x \geq 1 - 3 \quad \wedge \quad x - 2x \geq -6 - 3$$

$$x \geq -2 \quad \wedge \quad -x \geq -9$$

$$x \geq -2 \quad \wedge \quad x \leq 9$$

$$-2 \leq x \leq 9$$

13. Rešiti dvojnu nejednačinu po n:

$$-3 < \frac{n-1}{n+1} < 5$$

Rešenje:

$$-3 < \frac{n-1}{n+1} < 5$$

$$\frac{n-1}{n+1} > -3 \quad \wedge \quad \frac{n-1}{n+1} < 5$$

$$\frac{n-1}{n+1} + 3 > 0 \quad \wedge \quad \frac{n-1}{n+1} - 5 < 0$$

$$\frac{n-1+3n+3}{n+1} > 0 \quad \wedge \quad \frac{n-1-5n-5}{n+1} < 0$$

$$\frac{4n+2}{n+1} > 0 \quad \wedge \quad \frac{-4n-6}{n+1} < 0$$

Tražimo zajedničko rešenje za ove dve nejednačine.

$$\frac{4n+2}{n+1} > 0 \Leftrightarrow (4n+2 > 0 \ \wedge n+1 > 0) \vee (4n+2 < 0 \wedge \ n+1 < 0)$$

$$\Leftrightarrow (4n > -2 \wedge n > -1) \vee (4n < -2 \wedge n < -1)$$

$$\Leftrightarrow (n > \frac{-1}{2} \wedge n > -1) \vee (n < \frac{-1}{2} \wedge n < -1)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{-1}{2} \vee n < -1$$

$$\frac{-4n-6}{n+1} < 0 \Leftrightarrow (-4n-6 > 0 \wedge n+1 < 0) \vee (-4n-6 < 0 \wedge n+1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow (-4n > 6 \wedge n < -1) \vee (-4n < 6 \wedge n > -1)$$

$$\Leftrightarrow (n < \frac{-3}{2} \wedge n < -1) \vee (n > \frac{-3}{2} \wedge n > -1)$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{-3}{2} \vee n > -1$$

Tražimo presek:

$$(n > \frac{-1}{2} \vee n < -1) \wedge \quad (n < \frac{-3}{2} \vee n > -1)$$

Konačno rešenje:

$$(n < -1 \wedge n < \frac{-3}{2} \Rightarrow n < \frac{-3}{2}) \quad \vee \quad (n > \frac{-1}{2} \wedge n > -1 \Rightarrow n > \frac{-1}{2})$$

Rešenje je : $n < \frac{-3}{2} \vee n > \frac{-1}{2}$ tj. $n \in (-\infty, \frac{-3}{2}) \cup (\frac{-1}{2}, +\infty)$

III STEPENOVANJE I KORENOVANJE

Stepenovanje je matematička operacija u zapisu a^b, ($a,b \in R$). U ovom zapisu a se naziva ***osnova***, a b ***eksponent***. Ako je $n \in N$, onda stepen predstavlja osnovu pomnoženu samom sobom n puta.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n} \quad n\text{-ti stepen broja } a.$$

Napomena: Stepenovanje ima viši prioritet od množenja.

Najvažnija **svojstva stepenovanja**:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$)
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5. $a^n : b^n = (a : b)^n, \quad b \neq 0$
6. $a^0 = a^{n-n} = a^n : a^n = 1$
7. $a^{-n} = a^{0-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Neka je a realan i n prirodan broj. Svako rešenje jednačine $x^n = a$ po x (ako postoji) naziva se ***n-ti koren (korenovanje)*** broja a u oznaci: $x = \sqrt[n]{a}$.

Najvažnija **svojstva korenovanja**:

1. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n\text{-neparan} \\ |a|, & n\text{-paran} \end{cases}$
2. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
3. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
4. $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$
5. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

7. $\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[n]{a^{m}}$

14. Uprostiti izraz:

$$\frac{27x^{-2}y^{-3}}{3^2x^{-4}y^2}$$

Rešenje:

$$\frac{27x^{-2}y^{-3}}{3^2x^{-4}y^2} = \frac{3^{\cancel{3}}x^{-2}y^{-3}}{\cancel{3^2}x^{-4}y^2} = \frac{3x^{-2}x^4}{y^2y^3} = \frac{3x^{-2+4}}{y^{2+3}} = \frac{3x^2}{y^5}$$

15. Uprostiti izraz:

$$\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2^x-2^{-x}}{2}\right)^2$$

Rešenje:

$$\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2^x-2^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}+\frac{2^x-2^{-x}}{2}\right)\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}-\frac{2^x-2^{-x}}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{2^x+\cancel{2^{-x}}+2^x\cancel{-2^{-x}}}{2}\right)\left(\frac{\cancel{2^x}+2^{-x}\cancel{-2^x}+2^{-x}}{2}\right) =$$

$$\frac{\cancel{2}\cdot 2^x}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot 2^{-x}}{\cancel{2}} = 2^x\cdot 2^{-x} = 2^{x-x} = 2^0 = 1$$

16. Ako je $A = \dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}$ i

$$B = \left(\frac{a^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}} - \frac{b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)\left(a^{-1}-b^{-1}\right)\left(a^{-2}+b^{-2}\right)^{-1}$$

dokazati da je $A = B^{-1}$.

Rešenje:

$$A=\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}=\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}{\frac{b-a}{ab}}=\frac{(b^2-a^2)ab}{(b-a)a^2b^2}=$$

$$=\frac{\cancel{(b-a)}(b+a)\cancel{ab}}{\cancel{(b-a)}a^{\cancel{2}}b^{\cancel{2}}}=\frac{b+a}{ab}$$

$$B=\left(\frac{a^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}-\frac{b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)\left(a^{-1}-b^{-1}\right)\left(a^{-2}+b^{-2}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}-\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{b-a}{ab}}-\frac{\frac{1}{b}}{\frac{b+a}{ab}}\right)\left(\frac{b-a}{ab}\right)\left(\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\cancel{a}b}{\cancel{a}(b-a)}-\frac{a\cancel{b}}{\cancel{b}(b+a)}\right)\left(\frac{b-a}{\cancel{ab}}\right)\left(\frac{a^{\cancel{2}}b^{\cancel{2}}}{b^2+a^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{b}{(b-a)}-\frac{a}{(b+a)}\right)\left(\frac{b-a}{1}\right)\left(\frac{ab}{b^2+a^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{b(b+a)-a(b-a)}{(b-a)(b+a)}\right)\left(\frac{b-a}{1}\right)\left(\frac{ab}{b^2+a^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{b^2+\cancel{ba}-\cancel{ab}+a^2}{\cancel{(b-a)}(b+a)}\right)\left(\frac{\cancel{b-a}}{1}\right)\left(\frac{ab}{b^2+a^2}\right)=$$

$$=\frac{\cancel{b^2+a^2}}{(b+a)}\cdot\frac{ab}{\cancel{b^2+a^2}}=\frac{ab}{b+a}$$

$$A=\frac{b+a}{ab},\ B=\frac{ab}{b+a}$$

$B^{-1}=\left(\frac{ab}{b+a}\right)^{-1}=\frac{b+a}{ab}=A$ što je i trebalo dokazati.

17. Izračunati:

$$5\sqrt{2}+3\sqrt{8}-\sqrt{50}-\sqrt{98}$$

Rešenje:

S obzirom da je:

$$\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 2\cdot 2}=2\sqrt{2}$$
$$\sqrt{50}=\sqrt{5\cdot 5\cdot 2}=5\sqrt{2}$$
$$\sqrt{98}=\sqrt{7\cdot 7\cdot 2}=7\sqrt{2}$$

Dobijamo sledeće:

$$5\sqrt{2}+3\sqrt{8}-\sqrt{50}-\sqrt{98}=5\sqrt{2}+3\cdot 2\sqrt{2}-5\sqrt{2}-7\sqrt{2}=$$
$$=5\sqrt{2}+6\sqrt{2}-12\sqrt{2}=-\sqrt{2}$$

18. Obaviti naznačene operacije:

$$(x\sqrt{x})^3\cdot 3\sqrt{x\sqrt[3]{x}}:x^4\sqrt[6]{x^5}$$

Rešenje:

$$(x\sqrt{x})^3\cdot 3\sqrt{x\sqrt[3]{x}}:x^4\sqrt[6]{x^5}=(\sqrt{xx^2})^3\cdot 3\sqrt{\sqrt[3]{xx^3}}:\sqrt[6]{x^5x^{24}}=$$
$$=(\sqrt{x^{2+1}})^3\cdot 3\sqrt{\sqrt[3]{x^{3+1}}}:\sqrt[6]{x^{24+5}}=(\sqrt{x^3})^3\cdot 3\sqrt{\sqrt[3]{x^4}}:\sqrt[6]{x^{29}}=$$
$$=(\sqrt{x^{3\cdot 3}})\cdot 3\sqrt{(x^4)^{\frac{1}{3}}}:(x^{29})^{\frac{1}{6}}=\sqrt{x^9}\cdot 3((x^4)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}:(x^{29})^{\frac{1}{6}}=$$
$$=(x^9)^{\frac{1}{2}}\cdot 3((x^4)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}:(x^{29})^{\frac{1}{6}}=x^{9\cdot\frac{1}{2}}\cdot 3x^{4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}:x^{29\cdot\frac{1}{6}}=$$
$$=x^{\frac{9}{2}}\cdot 3x^{\frac{2}{3}}:x^{\frac{29}{6}}=3\cdot x^{\frac{9}{2}+\frac{2}{3}-\frac{29}{6}}=3x^{\frac{27}{6}+\frac{4}{6}-\frac{29}{6}}=3x^{\frac{2}{6}}=3x^{\frac{1}{3}}=3\sqrt[3]{x}$$

19. Racionalisati imenioce razlomka:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-2}$ b) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

Rešenje:

a) $$\frac{2}{\sqrt{5}-2}=\frac{2}{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=\frac{2(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5})^2-2^2}=\frac{2(\sqrt{5}+2)}{5-4}=2(\sqrt{5}+2)$$

b) $$\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{4-4\sqrt{3}+3}{2^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{7-4\sqrt{3}}{4-3}=\frac{7-4\sqrt{3}}{1}=7-4\sqrt{3}$$

IV KVADRATNA JEDNAČINA I KVADRATNA FUNKCIJA

Kvadratna jednačina je polinomijalna jednačina drugog stepena. Njen opšti oblik je $ax^2+bx+c=0$ gde je x nepoznata, a koeficijenti a,b,c su realni brojevi i $a\neq 0$.

Kvadratna jednačina $ax^2+bx+c=0$ sa realnim koeficijentima ima ***dva rešenja***, koja se nazivaju ***korenima***. Rešenja mogu biti realna ili kompleksna, a data su formulom:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Priroda rešenja kvadratne jednačine:

Diskriminanta kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0$ je izraz $\Delta=b^2-4ac$.

Za kvadratnu jednačinu sa realnim koeficijentima važi:

1) jednačina ima ***dva realna i različita rešenja*** ako i samo ako je $\Delta>0$

2) jednačina ima ***jedno dvostruko realno rešenje*** ako i samo ako je $\Delta=0$

3) jednačina ima ***dva kompleksno konjugovana rešenja*** ako i samo ako je $\Delta<0$

Pod ***iracionalnom jednačinom*** podrazumevamo jednačinu kod koje se nepoznata nalazi pod korenom.

Jednačina $\sqrt{a(x)}=b(x)$ je ekvivalentna sistemu: $a(x)=b^2(x)\wedge b(x)\geq 0$.

20. Odretiti skup rešenja jednačine:

$$\frac{34}{4x^2-1}+\frac{2x+1}{1-2x}=\frac{2x-1}{2x+1}$$

Rešenje:

$$\frac{34}{4x^2-1}+\frac{2x+1}{1-2x}=\frac{2x-1}{2x+1}$$

$$\frac{34}{(2x-1)(2x+1)}+\frac{2x+1}{1-2x}-\frac{2x-1}{2x+1}=0$$

$$\frac{34-(2x+1)^2-(2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)}=0$$

$$\frac{34-(4x^2+4x+1)-(4x^2-4x+1)}{(2x-1)(2x+1)}=0$$

$$\frac{34-4x^2-4x-1-4x^2+4x-1}{(2x-1)(2x+1)}=0$$

$$\frac{-8x^2+32}{(2x-1)(2x+1)}=0 \quad / \cdot (2x-1)(2x+1)\neq 0$$

$$-8x^2+32=0 \quad / :8$$

$$-x^2+4=0 \Rightarrow 4=x^2 \Rightarrow x=\pm 2$$

Skup rešenja je : {-2,2}.

21. Rešiti jednačinu:

$$(2x-3)^2+(2x-5)^2=4(x-3)^2+30$$

Rešenje:

$$(2x-3)^2+(2x-5)^2=4(x-3)^2+30$$

$$4x^2-12x+9+4x^2-20x+25=4(x^2-6x+9)+30$$

$$8x^2-32x+34=4x^2-24x+36+30$$

$$8x^2-32x+34-(4x^2-24x+36+30)=0$$

$$8x^2-32x+34-4x^2+24x-66=0$$

$$4x^2-8x-32=0/:4$$

$$x^2-2x-8=0$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}$$

$$x_1=4,\ x_2=-2$$

Skup rešenja: {-2,4}.

22. Za koje je realne vrednosti x razlomak $\dfrac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1}$ manji od -1?

Rešenje:

$$\frac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1}<-1$$

$$\frac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1}+1<0$$

$$\frac{-x^2+2x-5+2x^2-x-1}{2x^2-x-1}<0$$

$$\frac{x^2+x-6}{2x^2-x-1}<0$$

$$x^2+x-6=0$$

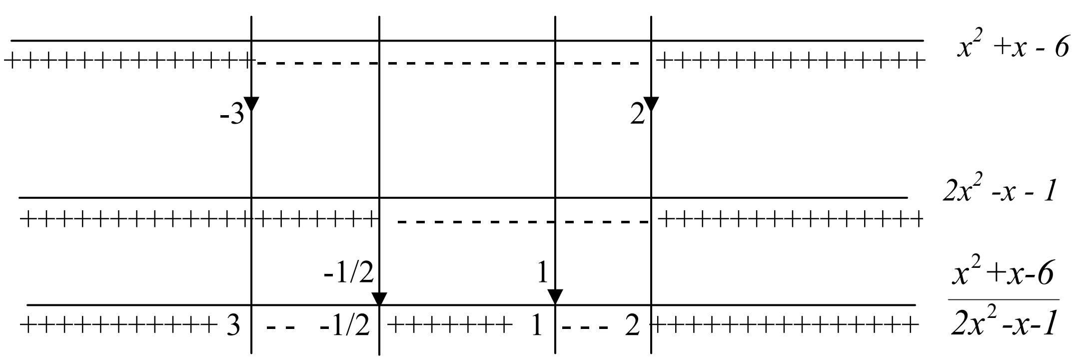
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}$$

$$x_1=-3,\ x_2=2$$

$$2x^2-x-1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}$$

$$x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{2}$$



Na osnovu preseka dolazimo do zaključka da je rešenje nejednačine: $x\in(-3,-\frac{1}{2})\cup(1,2)$.

23. Odretiti skup rešenja sistema:

$$x^2 + y^2 = 29$$
$$x + y = 7$$

Rešenje:

$$x^2 + y^2 = 29$$
$$x + y = 7$$

Na osnovu druge jednačine imamo da je $y = 7 - x$.

Zamenom $y = 7 - x$ u prvu jednačinu dobijamo:

$$x^2 + (7 - x)^2 = 29$$
$$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 29$$
$$2x^2 - 14x + 20 = 0 / : 2$$
$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$
$$x_1 = 5,\ x_2 = 2$$

S obzirom da je:

$$x_1 = 5 \Rightarrow y_1 = 7 - 5 = 2$$
$$x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 7 - 2 = 5$$

Dakle, skup rešenja sistema je:

$$\{(x = 5, y = 2); (x = 2, y = 5)\}.$$

24. Odrediti realna rešenja sledeće jednačine:

$$\sqrt{25 - x^2} = 7 - x$$

Rešenje:

$$\sqrt{P} = Q \Leftrightarrow P = Q^2 \wedge Q \geq 0$$

$\sqrt{25-x^2}=7-x \Leftrightarrow$

$\sqrt{25-x^2}=7-x\,/^2$

$25-x^2=(7-x)^2 \quad \wedge 7-x\geq 0$

$25-x^2=49-14x+x^2 \quad \wedge 7-x\geq 0$

$-2x^2+14x-24=0/:(-2) \quad \wedge 7\geq x$

$x^2-7x+12=0 \quad \wedge x\leq 7$

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{7\pm 1}{2} \quad \wedge x\leq 7$$

$x_1=4,\ x_2=3 \quad \wedge x\leq 7$

Realna rešenja jednačine su: $x=4\vee x=3$.

25. Rešiti jednačinu:

$$\frac{2x}{x-9}-\frac{x^2+25}{x^2-81}=\frac{5}{x+9}-\frac{5}{x-9},$$

Rešenje:

$$\frac{2x}{x-9}-\frac{x^2+25}{x^2-81}=\frac{5}{x+9}-\frac{5}{x-9}$$

$$\frac{2x}{x-9}-\frac{x^2+25}{(x-9)(x+9)}=\frac{5}{x+9}-\frac{5}{x-9}\,/\cdot(x-9)(x+9)\neq 0$$

$2x(x+9)-x^2-25=5(x-9)-5(x+9)$

$2x^2+18x-x^2-25=\cancel{5x}-45-\cancel{5x}-45$

$x^2+18x-25+90=0$

$x^2+18x+65=0$

$$x_{1,2}=\frac{-18\pm\sqrt{324-260}}{2}=\frac{-18\pm 8}{2}$$

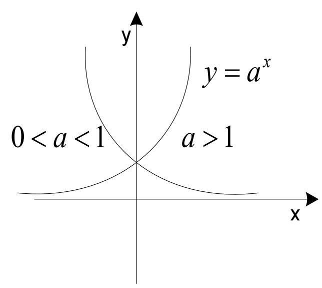
$x_1=-13,\ x_2=-5.$

V EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA

Funkciju oblika $f(x) = a^x$ gde je $a \in R, a > 0, a \neq 1$ nazivamo ***eksponencijalnom***. Definisana je za svako realno x i obostrano jednoznačno preslikava skup realnih brojeva $(-\infty, +\infty)$ na skup pozitivnih $(0, +\infty)$.

Ako je $a > 1$ funkcija je ***rastuća*** na celom domenu tj. $(\forall x_1, x_2 \in R)$ $(x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2})$.

Ako je $0 < a < 1$ funkcija je monotono ***opadajuća*** tj. $(\forall x_1, x_2 \in R)$ $(x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2})$.



Važe sledeći **eksponencijalni zakoni**:

1. $a^0 = 1$
2. $a^1 = a$
3. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $\dfrac{1}{a^x} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$
6. $a^x b^x = (ab)^x$.

Jednačine kod kojih se nepoznata nalazi u izložiocu (eksponentu) nazivamo ***eksponencijalne jednačine***. Eksponencijalne jednačine rešavamo najčešće, ako je moguće, svođenjem leve i desne strane jednačine na istu osnovu ili svođenjem leve i desne strane na isti izložilac.

U prvom slučaju imamo:

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, gde je $a \in R, a > 0, a \neq 1$, a $f(x), g(x)$ su funkcije argumenta x.

U drugom slučaju imamo:

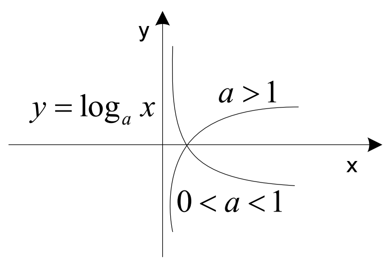
$a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = 0, \;\; a,b > 0, \;\; a,b \neq 1$

Eksponencijalna nejednačina oblika $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ (isto važi i za $>, \geq, \leq$), ukoliko je $a > 1$, je ekvivalentna sledećem: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

Eksponencijalna nejednačina oblika $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ (isto važi i za $>, \geq, \leq$), ukoliko je $0 < a < 1$, je ekvivalentna sledećem: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

Funkcija $f(x) = a^x$ je bijekcija, pa postoji $f^{-1} : R^+ \to R$, koju zovemo ***logaritamska funkcija*** i pišemo $f^{-1}(x) = \log_a x$.

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \Leftrightarrow a^{\log_a x} = x, \;\; x > 0$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \Leftrightarrow \log_a a^x = x, \;\; x \in R$$



Važno je znati sledeće:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$
$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Logaritamska funkcija je inverzna eksponencijalnoj funkciji*, pa su njihovi grafici simetrični u odnosu na pravu* $y = x$.

Svojstva logaritamske funkcije:

1. $D = R^+$ je domen logaritamske funkcije, a kodomen je skup realnih brojeva R
2. $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$, $x_1, x_2 > 0$
3. $\log_a (\frac{x_1}{x_2}) = \log_a x_1 - \log_a x_2$, $x_1, x_2 > 0$
4. $\log_a x^r = r \log_a x$, $x > 0, r \in R$

5. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, specijalno: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

6. $\log_{a^r} x = \dfrac{1}{r}\log_a x$

7. $\log_a 1 = 0$

8. $\log_a a = 1$

9. Ako je $a > 1$ funkcija je rastuća na celom domenu.

$(\forall x_1, x_2 \in R)\ \ (x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2)$

Ako je $0 < a < 1$ funkcija je monotono opadajuća.

$(\forall x_1, x_2 \in R)\ \ (x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2)$

10. Ako je $\log_a x_1 = \log_a x_2$ onda je $x_1 = x_2$.

Logaritam za osnovu 10 *označavamo sa* $\log$ *i zovemo* ***dekadni logaritam****, a* ***logaritam za osnovu*** e *označavamo sa* $\ln$ *i zovemo* ***prirodni logaritam****.*

$$x^r = e^{\ln x^r} = e^{r\ln x} \qquad x > 0, r \in R .$$

26. Rešiti eksponencijalnu jednačinu:

a) $2^{x-3} = 16$

b) $9^{-3x} = \left(\dfrac{1}{27}\right)^{x+3}$

Rešenje:

a) $2^{x-3} = 16 \Rightarrow 2^{x-3} = 2^4$

$x - 3 = 4 \Rightarrow x = 7$

b) $9^{-3x} = \left(\dfrac{1}{27}\right)^{x+3} \Rightarrow (3^2)^{-3x} = \left(\dfrac{1}{3^3}\right)^{x+3}$

$3^{-6x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3(x+3)} \Rightarrow 3^{-6x} = 3^{-3(x+3)} \Rightarrow 3^{-6x} = 3^{-3x-9}$

$-6x = -3x - 9 \Rightarrow -6x + 3x = -9$

$-3x = -9 \Rightarrow x = 3$.

27. Rešiti jednačinu:

$$100\cdot 10^{2x-2}=1000^{\frac{x+1}{9}}$$

Rešenje:

$$100\cdot 10^{2x-2}=1000^{\frac{x+1}{9}}\Rightarrow 10^{2}\cdot 10^{2x-2}=(10^{3})^{\frac{x+1}{9}}$$

$$10^{2+2x-2}=10^{\cancel{3}\cdot\frac{x+1}{\cancel{9}_{3}}}\Rightarrow 10^{2x}=10^{\frac{x+1}{3}}$$

$$2x=\frac{x+1}{3}\ /\cdot 3$$

$$6x=x+1$$

$$5x=1\Rightarrow x=\frac{1}{5}.$$

28. Rešiti nejednačinu:

$$5^{7x+3}>5^{-3}$$

Rešenje:

($y=a^{x}$ rastuća funkcija za $a>1$)

$$5^{7x+3}>5^{-3}\Rightarrow 7x+3>-3$$

$$7x>-6\Rightarrow x>-\frac{6}{7}$$

$$x\in(-\frac{6}{7},+\infty)$$

29. Rešiti sistem:

$$2^{x}\cdot 3^{y}=12$$

$$2^{y}\cdot 3^{x}=18$$

Rešenje:

$$2^x \cdot 3^y = 12$$
$$2^y \cdot 3^x = 18$$

Podelimo prvu jednačinu drugom:

$$\frac{2^x \cdot 3^y}{2^y \cdot 3^x} = \frac{12}{18}$$

$$2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = \frac{2}{3}$$

$$2^{x-y} \cdot \frac{1}{3^{x-y}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2^{x-y}}{3^{x-y}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{2}{3}$$

$$x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1$$

Na ovaj način smo dobili vezu između x i y. Zamenom $x = y + 1$ u prvu jednačinu dobijamo:

$$2^{1+y} \cdot 3^y = 12$$
$$2 \cdot 2^y \cdot 3^y = 12$$
$$2^y \cdot 3^y = 6 \Rightarrow (2 \cdot 3)^y = 6$$
$$6^y = 6 \Rightarrow y = 1$$
$$y = 1 \Rightarrow x = 2$$

Rešenje sistema: $(x = 2, y = 1)$.

30. Rešiti jednačinu:

$$4^{x+1} + 4^x = 320$$

Rešenje:

$$4^{x+1} + 4^x = 320$$
$$4 \cdot 4^x + 4^x = 320$$

$$5 \cdot 4^x = 320 \Rightarrow 4^x = 64$$
$$4^x = 64 \Rightarrow 4^x = 4^3 \Rightarrow x = 3$$

31. Rešiti jednačinu:

$$3^{\frac{x-1}{2}} - 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 3^{\frac{x-3}{2}}$$

Rešenje:

$$3^{\frac{x-1}{2}} - 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 3^{\frac{x-3}{2}}$$
$$3^{\frac{x-1}{2}} - 3^{\frac{x-3}{2}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 2^{\frac{x+1}{3}}$$
$$3^{\frac{x-3}{2}}(3-1) = 2^{\frac{x-2}{3}}(1+2)$$
$$2 \cdot 3^{\frac{x-3}{2}} = 3 \cdot 2^{\frac{x-2}{3}}$$
$$\frac{3^{\frac{x-3}{2}}}{3} = \frac{2^{\frac{x-2}{3}}}{2} \Rightarrow 3^{\frac{x-5}{2}} = 2^{\frac{x-5}{3}}$$
$$(\sqrt{3})^{x-5} = (\sqrt[3]{2})^{x-5}$$
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)^{x-5} = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)^{x-5} = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)^{0}$$
$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

32. Izračunati vrednost izraza:

$$3\log_5 25 + 2\log_3 27 - 4\log_2 8$$

Rešenje:

$$3\log_5 25 + 2\log_3 27 - 4\log_2 8 =$$
$$3\log_5 5^2 + 2\log_3 3^3 - 4\log_2 2^3 =$$
$$3 \cdot 2 \cdot \log_5 5 + 2 \cdot 3 \cdot \log_3 3 - 4 \cdot 3 \cdot \log_2 2 =$$
$$3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 6 + 6 - 12 = 0.$$

33. Rešiti jednačinu:

$$\log(5-x)+2\log\sqrt{3-x}=1$$

Rešenje:

$$\log(5-x)+2\log\sqrt{3-x}=1$$

Treba utvrditi za koje vrednosti promenljive x postoje logaritamske funkcije date u zadatku:

$$5-x>0 \ \wedge \ 3\text{-}x>0$$

$$x<5 \ \wedge \ x<3$$

Rešavamo jednačinu:

$$\log(5-x)+2\log\sqrt{3-x}=1$$

$$\log(5-x)+\log(\sqrt{3-x})^2=1$$

$$\log(5-x)+\log(3-x)=1$$

$$\log_{10}(5-x)(3-x)=1$$

$$(5-x)(3-x)=10$$

$$15-5x-3x+x^2=10$$

$$x^2-8x+5=0$$

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-20}}{2}=\frac{8\pm 2\sqrt{11}}{2}$$

$$x_1=4-\sqrt{11} \quad x_2=4+\sqrt{11}$$

Treba proveriti da li ova rešenja zadovoljavaju uslov $x<3$.

Zaključujemo da ovom intervalu pripada rešenje $x_1=4-\sqrt{11},$ koje je rešenje naše jednačine.

34. Rešiti jednačinu:

$$\log_x(5x^2)\cdot\log_5^2 x=1$$

Rešenje:

Oblast definisanosti : $x>0 \wedge x\neq 1$

$$\log_x(5x^2)\cdot\log_5^2 x=1$$

$$(\log_x 5+\log_x x^2)\cdot\log_5^2 x=1$$

$$(\log_x 5+2\log_x x)\cdot\log_5^2 x=1$$

$$(\log_x 5+2)\cdot\log_5^2 x=1$$

$$\left(\frac{1}{\log_5 x}+2\right)\cdot\log_5^2 x=1$$

$$\frac{\log_5^{\cancel{2}} x}{\cancel{\log_5 x}}+2\cdot\log_5^2 x=1$$

$$\log_5 x+2\log_5^2 x-1=0$$

Uvodimo smenu $\log_5 x=t$ i dobijamo sledeću kvadratnu jednačinu:

$$2t^2+t-1=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}$$

$$t_1=-1,\ t_2=\frac{1}{2}$$

Za $t_1=-1$ imamo $\log_5 x=-1\Rightarrow x=5^{-1}=\frac{1}{5}$

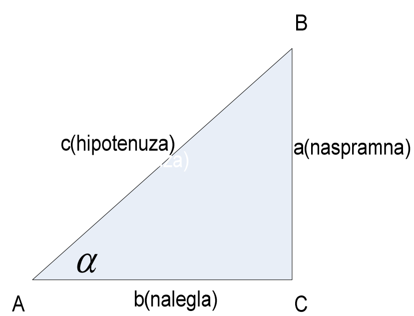
Za $t_2=\frac{1}{2}$ imamo $\log_5 x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

Rešenja jednačine su: $x_1=\frac{1}{5}\vee x_2=\sqrt{5}$.

VI TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

Trigonometrija (*lat.trigonon-trougao, metron-mera*) je deo matematike koji izučava zavisnost između strana i uglova trougla u ravni ili na površini sfere. Pomoću trigonometrijskih funkcija moguće je odrediti nepoznatu dimenziju, ugao nagiba u matematičkim i tehničkim proračunima.

Trigonometrijske funkcije su*: sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans i kosekans.*



Odnos naspramne stranice i hipotenuze nazivamo ***sinusnom funkcijom ili sinus*** *i zapisujemo kao sin.*

Odnos nalegle stranice i hipotenuze nazivamo ***kosinusnom funkcijom ili kosinus*** *i zapisujemo cos.*

Odnos naspramne i nalegle stranice naziva se ***tangens*** *ili skraćeno tg, a odnos nalegle i naspramne stranice naziva se* ***kotangens*** *ili skraćeno ctg.*

Kosekans *je recipročna vrednost sinusne funkcije ili skraćeno cosec (ili csc), a* ***sekans*** *je recipročna vrednost kosinusne funkcije ili skraćeno sec.*

$$\sin\alpha=\frac{a}{c},\ \ \cos\alpha=\frac{b}{c}$$

$$tg\alpha=\frac{a}{b},\ \ \mathrm{ctg}\alpha=\frac{b}{a},\ \ \mathrm{cosec}\alpha=\frac{c}{a},\ \ \sec\alpha=\frac{c}{b}.$$

Iz navedenih definicija izvodimo:

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \ \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\mathrm{cosec}\alpha}{\sec\alpha},\ \ \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1.$$

Sledeće osnovne relacije nazivaju se ***osnovni trigonometrijski identiteti*** ili ***Pitagorini identiteti*** zasnovani na Pitagorinoj teoremi:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ 1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha\ ,\ 1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\cos\mathrm{ec}^2\alpha$$

Vrednosti trigonometrijskih funkcija:

Stepen	Radijan	Sin α	Cos α	Tg α	Ctg α	Sec α	Cosec α
0º	0	0	1	0	∞	1	∞
30º	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2
45º	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60º	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$
90º	$\pi/2$	1	0	∞	0	∞	1

Osnovne trigonometrijske formule:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \sin\alpha\cdot\cos ec\alpha=1,\ \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}},\ \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{1}{ctg\alpha},\ ctg\alpha=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=\frac{1}{tg\alpha}$$

Funkcije zbira i razlike:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha tg\beta}$$

$$ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta\mp1}{ctg\beta\pm ctg\alpha}$$

Funkcije višestrukih uglova:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\ \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - \sin^3\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,\ \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha},\ tg3\alpha = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha},$

$ctg2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha},\ ctg3\alpha = \dfrac{ctg^3\alpha - 3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha - 1}$

Zbir i razlika funkcija:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$tg\alpha \pm tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ ctg\alpha \pm ctg\beta = \pm\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

$tg\alpha + ctg\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta},\ ctg\alpha - tg\beta = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$

Proizvod funkcija:

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]$

Funkcije polovine ugla:

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2},\ \cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

$tg^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\quad ctg^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$

Funkcije suprotnog ugla:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$tg(-\alpha) = -tg\alpha,\ ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$

Trigonometrijske jednačine:

	Osnovna rešenja	***Sva rešenja***
$\sin\alpha = \sin\beta$	$\alpha = \beta$ $\alpha = \pi - \beta$	$\alpha = \beta + 2k\pi,\ \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$ $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi,\ \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$
$\cos\alpha = \cos\beta$	$\alpha = \beta$ $\alpha = -\beta$	$\alpha = \beta + 2k\pi,\ \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$ $\alpha = -\beta + 2k\pi,\ \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$
$tg\alpha = tg\beta$	$\alpha = \beta$	$\alpha = \beta + k\pi,\ \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$
$ctg\alpha = ctg\beta$	$\alpha = \beta$	$\alpha = \beta + k\pi,\ \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$

35. Dokazati sledeći identitet:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Rešenje:

I način:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\alpha = (1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$$

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

II način:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^{\cancel{2}}\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

36. Dokazati sledeći identitet:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{1+ctg^2\alpha}{1-ctg^2\alpha}$$

Rešenje:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{1+ctg^2\alpha}{1-ctg^2\alpha}$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\frac{1+ctg^2\alpha}{1-ctg^2\alpha}$$

37. Dokazati identitet:

$$1-\frac{\sin^2\alpha}{1+ctg\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{1+tg\alpha}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

Rešenje:

$$1-\frac{\sin^2\alpha}{1+ctg\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{1+tg\alpha}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$1-\frac{\sin^2\alpha}{1+ctg\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{1+tg\alpha}=1-\frac{\sin^2\alpha}{1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}-\frac{\cos^2\alpha}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$1-\frac{\sin^2\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}-\frac{\cos^2\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=1-\frac{\sin^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-(\sin^3\alpha+\cos^3\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cancel{(\sin\alpha+\cos\alpha)}(\cancel{1}-\cancel{1}+\sin\alpha\cos\alpha)}{\cancel{\sin\alpha+\cos\alpha}}=\sin\alpha\cos\alpha$$

38. Odrediti sva rešenja jednačine:

$$2\sin^2 x+\sin x=0$$

Rešenje:

$$2\sin^2 x+\sin x=0$$

$$\sin x(2\sin x+1)=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \vee 2\sin x+1=0$$

$$\sin x=0 \Leftrightarrow x_k=k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,...)$$

$$2\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_m=\frac{7\pi}{6}+2m\pi \vee x_n=\frac{11\pi}{6}+2n\pi$$

$$(m,n=0,\pm1,\pm2,...)$$

39. Za koje α važi formula:

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Rešenje:

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\frac{|\sin\alpha|}{1+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\Rightarrow|\sin\alpha|=\sin\alpha$$

Rešenje je: $2k\pi\leq\alpha\leq(2k+1)\pi$.

VII POLIEDRI

Poliedar je geometrijsko telo ograničeno sa četiri ili više površi i kome su ivice prave duži. Poliedri se *dele* prema *konveksnosti, simetričnosti, oblicima površi koje ih čine, broju ivica koje se sastaju u jednom temenu. Naziv* se poliedru daje *prema broju površi* (tetraedar-4 površi, pentaedar-5, heksaedar-6,...) i prema obliku površi koje ga čine.

Najpoznatiji poliedri su ***prizma*** i ***piramida***.

Prizma

Prizma je geometrijsko telo koje se sastoji od dva paralelna i podudarna mnogougla i onoliko paralelograma koliko stranica ima jedan od tih mnogouglova. Mnogouglove nazivamo ***osnove-baze prizme***, a paralelogrami su ***bočne strane prizme***. Bočne strane prizme obrazuju ***omotač prizme***. ***Visina prizme*** je duž koja je normalna na osnove prizme i čije krajnje tačke pripadaju ravnima osnova prizmi.

Površina prizme izražava se formulom:

$P = 2B + M$, gde je B površina baze, a M površina omotača.

Zapremina prizme izražava se formulom:

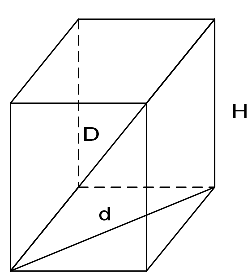
$V = BH$ gde je B površina baze, a H visina prizme.

Pravilna četvorostrana prizma

$B = a^2$

$M = 4aH$

$D = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + H^2}$



Kocka:

$P = 6a^2$

$V = a^3$

$D = a\sqrt{3}$

Kvadar:

$P = 2(ab + ac + bc)$

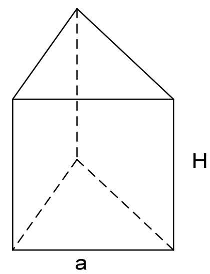
$V = abc$

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Pravilna trostrana prizma

$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

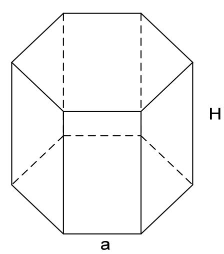
$M = 3aH$



Pravilna šestostrana prizma

$B = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$M = 6aH$



Piramida

Piramida je geometrijsko telo ograničeno delom jedne rogljaste površi i jednim mnogouglom. ***Teme roglja*** je vrh piramide. Mnogougao koji pripada presečenoj ravni je ***osnova piramide***, a stranice tog mnogougla su osnovne ***ivice piramide***. Odsečci ivica roglja su ***bočne ivice piramide***, a trouglovi određeni stranama roglja su ***bočne strane piramide***. Bočne strane piramide čine ***omotač piramide***. Duž normalna na osnovu piramide, čija je jedna krajnja tačka vrh piramide, a druga pripada ravni osnove, naziva se ***visina piramide***. *Visina bočne strane naziva se* ***apotema***.

Površina piramide izražava se formulom:

$P = B + M$, gde je B površina baze, a M površina omotača.

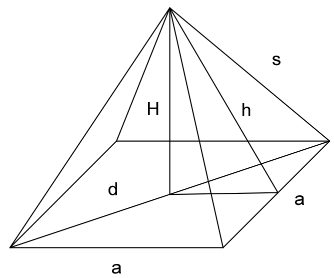
Zapremina piramide izražava se formulom:

$V = \frac{1}{3}BH$, gde je B površina baze, a H visina prizme.

Pravilna četvorostrana piramida

$B = a^2$

$M = 4\dfrac{ah}{2} = 2ah$



Važne relacije:

$s^2 = H^2 + \left(\dfrac{d}{2}\right)^2$

$s^2 = h^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

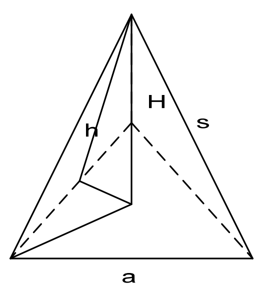
$h^2 = H^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$,

gde je a osnovna ivica, s bočna ivica, h visina bočne strane, d dijagonala osnove.

Pravilna trostrana piramida

$B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$M = 3\dfrac{ah}{2}$



Važne relacije:

$s^2 = H^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$

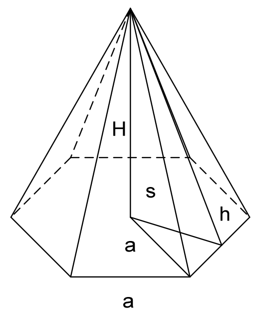
$h^2 = H^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$

$s^2 = h^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

Pravilna šestostrana piramida

$$B = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$M = 6\frac{ah}{2} = 3ah$$



Važne relacije:

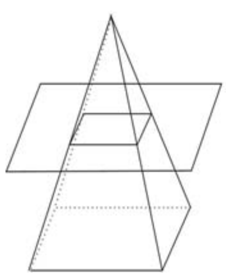
$$s^2 = H^2 + a^2$$

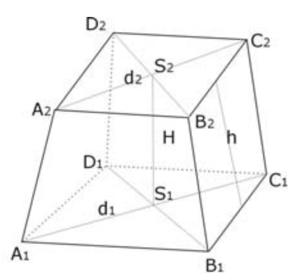
$$s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Zarubljena piramida

Ako se n-tostrana piramida preseče sa ravni koja je paralelna ravni osnove dobija se mnogougao homotetičan sa osnovom. *Deo piramide između tih homotetičkih površi jeste n-tostrana* ***zarubljena piramida****.*





Površina zarubljene piramide se izražava formulom:

$P = B_1 + B_2 + M$, gde su B_1, B_2 površina donje i gornje osnove, a M površina omotača.

Zapremina zarubljene piramide izražava se formulom:

$$V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 \cdot B_2} + B_2)$$

40. Pravilna četvorostrana prizma ima omotač 8m² i dijagonalu 3m. Izračunati njenu zapreminu.

Rešenje:

$M = 8m^2$

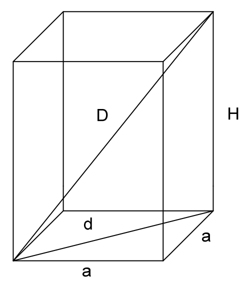
$D = 3m$

$V = ?$

$V = BH = a^2 H$

$M = 4aH$

$4aH = 8 \Rightarrow H = \dfrac{2}{a}$



Dijagonala osnove je $d = a\sqrt{2}$, pa primenom Pitagorine teoreme dobijamo:

$$d^2 + H^2 = D^2$$

$$(a\sqrt{2})^2 + H^2 = 3^2$$

$$2a^2 + H^2 = 9$$

$$2a^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 9$$

$$2a^2 + \frac{4}{a^2} = 9 / \cdot a^2$$

$$2a^4 + 4 = 9a^2$$

$$2a^4 - 9a^2 + 4 = 0$$

Uvodimo smenu $a^2 = t$, pa poslednja jednačina postaje:

$$2t^2 - 9t + 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4}$$

$$t_1 = 4,\ t_2 = \frac{1}{2}$$

$$t_1 = 4 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$a_1 = 2 \Rightarrow H_1 = \frac{2}{2} = 1$$

$V_1 = a_1^2 H_1 = 4 \cdot 1 = 4m^3$

$t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

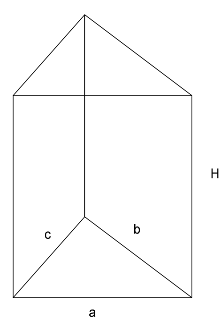
$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow H_2 = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$

$V_2 = a_2^2 H_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}m^3$

41. Površina prave trostrane prizme jednaka je 1440 cm², a njena visina je 16 cm. Izračunati osnovne ivice prizme, ako se one odnose kao 17:10:9.

Rešenje:

$P = 1440cm^2$
$H = 16cm$
$a:b:c = 17:10:9$
$a,b,c = ?$



$P = 2B + M$

$1440 = 2B + M$

$a:b:c = 17:10:9 = k$

$a = 17k,\ b = 10k,\ c = 9k$

Površinu osnove izračunaćemo primenom Heronovog obrasca:

$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gde je $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluobim trougla.

$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{17k+10k+9k}{2} = 18k$

$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{18k(18k-17k)(18k-10k)(18k-9k)} =$

$= \sqrt{18k \cdot k \cdot 8k \cdot 9k} = 36k^2$

$M = (a+b+c)H = (17k+10k+9k) \cdot 16 = 36k \cdot 16 = 576k$

$P = 2B + M$

$1440 = 2 \cdot 36k^2 + 576k$

$72k^2 + 576k - 1440 = 0 / : 72$

$k^2 + 8k - 20 = 0$

$k_{1,2} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{2} = \dfrac{-8 \pm 12}{2}$

$k_1 = -10,\ k_2 = 2$

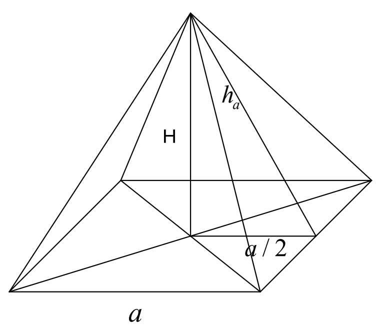
Odbacujemo negativno rešenje, tj. rešenje poslednje jednačine je $k_2 = 2$.

$a = 34,\ b = 20,\ c = 18$.

42. Date su osnovna ivica $a = 10cm$ i visina $H = 12cm$ pravilne četvorostrane piramide. Odrediti njenu površinu i zapreminu.

Rešenje:

$a = 10cm$
$H = 12cm$
$P, V = ?$



$V = \dfrac{1}{3} BH = \dfrac{1}{3} a^2 H$

$V = \dfrac{1}{3} 10^2 \cdot 12 = 400cm^3$

$P = B + M = a^2 + 4\dfrac{ah_a}{2} = a^2 + 2ah_a$

Treba odrediti visinu bočne strane. Primenjujemo Pitagorinu teoremu:

$H^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = h_a{}^2$

$12^2 + 5^2 = h_a{}^2$

$169 = h_a{}^2 \Rightarrow h_a = 13$

$P = a^2 + 2ah_a = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 13 = 360cm^2$

43. Osnovne ivice pravilne trostrane zarubljene piramide su 2m i 6m. Bočna strana nagnuta je prema većoj osnovi pod uglom od 60º. Izračunati zapreminu te piramide.

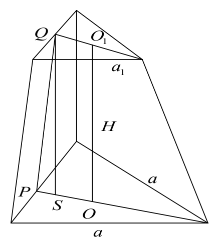
Rešenje:

$a = 6m$

$a_1 = 2m$

$\alpha = 60°$

$V = ?$



$$V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$$

$H = ?$

$$OP = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}\frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$QO_1 = \frac{1}{3}\frac{a_1\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

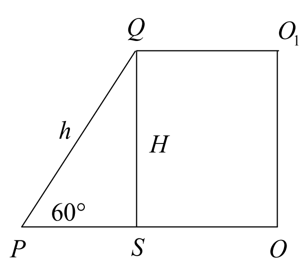
$$PS = PO - QO_1$$

$$PS = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Iz trougla PSQ imamo sledeće:

$$tg60° = \frac{H}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow H = tg60° \cdot \tfrac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \cdot \tfrac{2\sqrt{3}}{3} = 2$$

$H = 2$



$$B_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$\sqrt{B_1 B_2} = \sqrt{9\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

$$V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$$

$$V = \frac{2}{3}(9\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + \sqrt{3})$$

$$V = \frac{2}{3}13\sqrt{3} = \frac{26\sqrt{3}}{3}m^3$$

44. Osnova piramide je pravougaonik čija je površina S i ugao između dijagonala 60º. Odrediti zapreminu piramide ako su bočne ivice nagnute prema ravni osnove pod uglom od 45º.

Rešenje:

$$B = S$$

$$\angle d_1 O d_2 = 60°$$

$$\alpha = 45°$$

$$V = ?$$

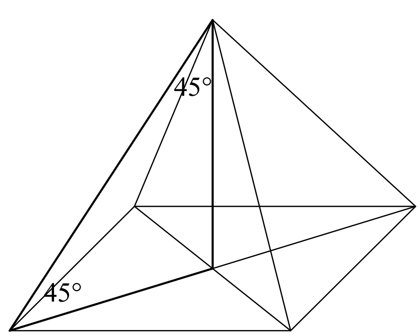
$$V = \frac{1}{3}BH$$

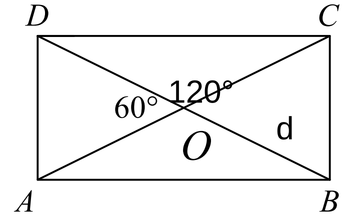
$$H = \frac{d}{2}$$

$$B = 2P_{BOC} + 2P_{ABO}$$

$$B = 2\frac{\frac{d}{2}\frac{d}{2}\sin 60°}{2} + 2\frac{\frac{d}{2}\frac{d}{2}\sin 120°}{2}$$

$$B = \frac{d^2\frac{\sqrt{3}}{2}}{4} + \frac{d^2\frac{\sqrt{3}}{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}d^2$$





$$\frac{\sqrt{3}}{4}d^2 = S$$

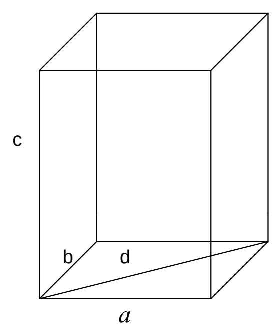
$$4S = \sqrt{3}d^2 \Rightarrow d^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}} \Rightarrow d = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$$

$$H = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}} \Rightarrow V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}S\frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{S\sqrt{S}}{9}\sqrt[4]{27}$$

45. Ivice pravouglog paralelepipeda a,b,c, koje polaze iz jednog temena, odnose se kao $m:n:p$, a dijagonala osnove (a,b) je d. Izračunati površinu i zapreminu paralelepipeda.

Rešenje:

$a:b:c = m:n:p$
d
$P,V = ?$



$$a:b:c = m:n:p = k$$
$$a = mk$$
$$b = nk$$
$$c = pk$$
$$a^2 + b^2 = d^2$$
$$k^2m^2 + k^2n^2 = d^2$$
$$k^2(m^2 + n^2) = d^2$$
$$k^2 = \frac{d^2}{m^2 + n^2} \Rightarrow k = \frac{d}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$a = \frac{md}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$b = \frac{nd}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$c = \frac{pd}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$P = 2(ab + bc + ac)$$

$$P = 2\left(\frac{md}{\sqrt{m^2 + n^2}} \frac{nd}{\sqrt{m^2 + n^2}} + \frac{nd}{\sqrt{m^2 + n^2}} \frac{pd}{\sqrt{m^2 + n^2}} + \frac{md}{\sqrt{m^2 + n^2}} \frac{pd}{\sqrt{m^2 + n^2}} \right) =$$

$$P = 2\frac{mnd^2 + npd^2 + mpd^2}{m^2 + n^2} = \frac{2d^2(mn + np + mp)}{m^2 + n^2}$$

$$V = abc = \frac{md}{\sqrt{m^2 + n^2}} \frac{nd}{\sqrt{m^2 + n^2}} \frac{pd}{\sqrt{m^2 + n^2}} == \frac{mnpd^3}{\sqrt{(m^2 + n^2)^3}}$$

VIII OBRTNA TELA

Obrtna površ je površ koju obrazuje jedna linija koja se rotira oko jedne stalne prave. Linija koja izvodi kretanje naziva se ***izvodnica***, a stalna prava ***osa rotacije***. *Telo ograničeno jednom obrtnom površi ili delom obrtne površi i ravnima normalnim na osu rotacije naziva se* ***obrtno ili rotaciono telo***.

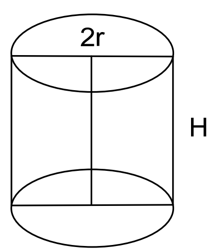
Valjak

Površ obrazovana kretanjem prave koja ostaje stalno paralelna samoj sebi naziva se ***cilindrična površ***. ***Valjak*** *je geometrijsko telo ograničeno sa dva kruga u paralelnim ravnima i delom cilindrične površi, čije su izvodnice normalne na ravni tih krugova.* Krugovi su ***osnove valjka***. ***Omotač valjka*** naziva se deo cilindrične površi između ravni osnova. ***Visina valjka*** je duž normalna na osnove sa krajnjim tačkama u osnovama.

Površina valjka izražava se formulom:

$P = 2B + M$

$B = r^2\pi,\ M = 2r\pi H$



gde je B površina osnove, M površina omotača valjka, r poluprečnik osnove, H visina valjka.

Zapremina valjka izražava se formulom:

$V = BH$

Osni presek valjka *je pravougaonik sa stranicama H i $2r$ i dobija se presekom valjka i ravni koja sadrži osu valjka.*

Poprečni presek valjka *je krug poluprečnika r i nastaje presekom valjka i ravni koja je paralelna ravni osnove.*

Ravnostrani valjak *je onaj valjak kod koga je $2r = H$.*

Kupa

Ako se prava kreće tako da stalno prolazi kroz jednu istu tačku, onda se nastala površ naziva ***konusna površ***. Tačka kroz koju prolazi prava naziva se ***vrh konusne površi***, a sama pokretna prava ***izvodnica*** ili ***generatrisa***.

Prava kružna konusna površ je obrtna površ čija osa rotacije spaja vrh i centar kruga.

Ako se prava kružna konusna površ preseče jednom ravni normalnoj na osu, onda ta ravan i deo kružne konusne površi obrazuju jedno obrtno telo koje se naziva prava kružna kupa ili samo ***prava kupa***.

Deo presečene ravni ograničen konusnom površi (krug) je ***osnova kupe***, a deo konusne površi između vrha i osnove je ***omotač kupe***. Izvodnice konusne površi, koje pripadaju omotaču kupe, nazivaju se ***izvodnice kupe***. Rastojanje između vrha i ravni osnove kupe je ***visina kupe***, a duž koja spaja vrh sa središtem osnove ***osa kupe***. Osa prave kupe je ujedno i njena ***visina***.

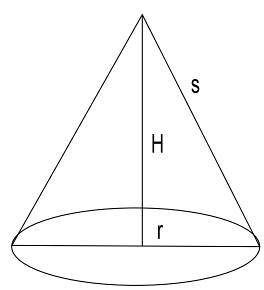
Zarubljena kupa *je deo kupe ograničen osnovom kupe, jednom ravni paralelnom sa osnovom i odgovarajućim delom konusne površi.* Osnova pune kupe, iz koje je dobijena zarubljena kupa, i krug u preseku kupe i date ravni, nazivaju se ***osnove zarubljene kupe***.

Površina kupe izražava se formulom:

$P = B + M$

$B = r^2\pi$

$M = r\pi s$



Zapremina kupe izražava se formulom:

$V = \frac{1}{3} BH$

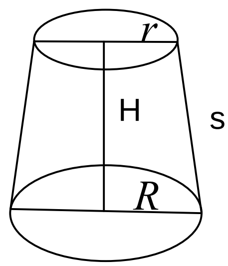
Važna relacija:

$s^2 = r^2 + H^2$

Površina zarubljene kupe:

$P = B_1 + B_2 + M$ gde su B_1, B_2 površina donje i gornje osnove sa poluprečnicima R i r, a M površina omotača.

$B_1 = R^2\pi$
$B_2 = r^2\pi$
$M = (R+r)\pi s$



Zapremina zarubljene kupe:

$$V = \frac{1}{3}H(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$$

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

Lopta

Geometrijsko mesto tačaka u prostoru podjednako udaljenih od jedne iste tačke (centra) jeste jedna površ, koja se naziva ***sfera*** ili ***loptina površ***.

Telo ograničeno sferom naziva se ***lopta****.*

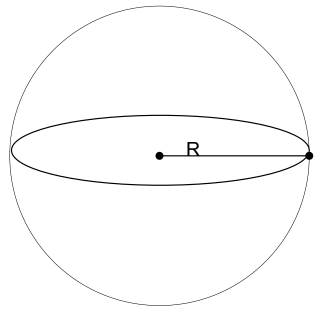
Duž koja spaja centar sa jednom tačkom sfere jeste njen ***poluprečnik*** (***radijus***), a duž koja spaja dve proizvoljne tačke sfere je ***tetiva sfere***. Tetiva koja prolazi kroz centar sfere naziva se ***prečnik*** (***dijametar***).

Sfera može nastati i rotiranjem polukruga oko njegovog prečnika. U tom slučaju centar polukruga je istovremeno i centar sfere, a njegov poluprečnik je i poluprečnik sfere.

Prema tome, *sfera je obrtna površ, a lopta obrtno telo*.

Površina lopte izražava se formulom:

$P = 4R^2\pi$, gde je R poluprečnik lopte.



Zapremina lopte se izražava formulom: $V = \frac{4}{3}R^3\pi$

46. Koliko je kvadratnih metara metalnog lima potrebno za izradu cilindričnog dimnjaka visine 18m i prečnika 65cm?

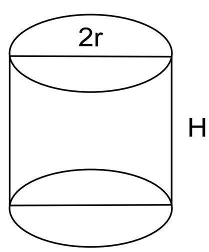
Rešenje:

$H = 18m$

$2r = 65cm \Rightarrow$

$r = 32.5cm = 0.325m$

$M = ?$



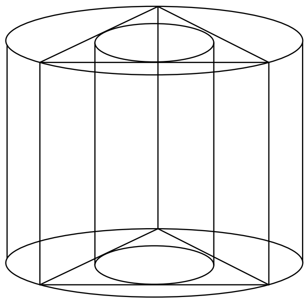
$M = 2r\pi H$

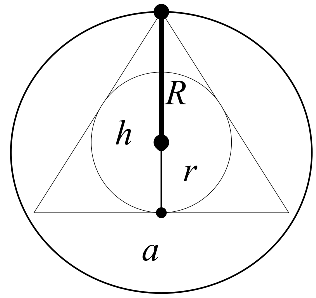
$M = 0.65 \cdot 3.14 \cdot 18$

$M = 36.74m^2$

47. U kružnom valjku upisana je trostrana prizma, a u prizmu je upisan valjak. Odrediti razmeru zapremina tih valjaka.

Rešenje:





$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{1}{3}h \Rightarrow r = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R = \frac{2}{3}h \Rightarrow R = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$V_1 = B_1H = r^2\pi H$$

$$V_2 = B_2H = R^2\pi H$$

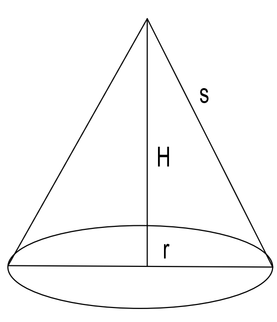
$$V_1 : V_2 = \frac{r^2\cancel{\pi H}}{R^2\cancel{\pi H}} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{(\frac{a\sqrt{3}}{6})^2}{(\frac{a\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{\frac{3a^2}{36}}{\frac{3a^2}{9}} = \frac{\cancel{3a^2}\cdot\cancel{9}}{\cancel{3a^2}\cdot\cancel{36}_4} = \frac{1}{4}$$

$$V_1 : V_2 = 1:4$$

48. Izračunati površinu i zapreminu kupe, ako je njena izvodnica za 1 cm duža od visine, a prečnik osnove je 1 dm.

Rešenje:

$2r = 1dm \Rightarrow r = 5cm$
$H + 1cm = s$
$P, V = ?$
$P = B + M$
$P = r^2\pi + \pi rs$



$$r^2 + H^2 = s^2 \Rightarrow r^2 + H^2 = (H+1)^2 \Rightarrow 5^2 + H^2 = H^2 + 2H + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2H = 24 \Rightarrow H = 12cm \Rightarrow s = H + 1 = 13cm$$

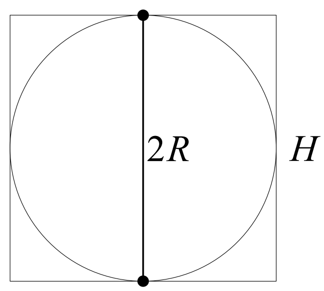
$$P = 5^2\pi + \pi \cdot 5 \cdot 13 = 25\pi + 65\pi = 90\pi cm^2$$

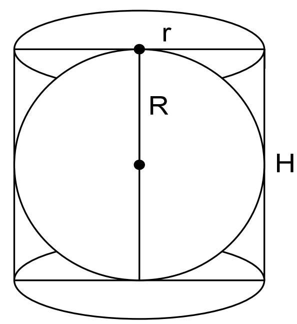
$$V = \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{1}{3}5^2 \cdot \pi \cdot 12 = 100\pi cm^3$$

49. Površina lopte jednaka je površini omotača valjka opisanog oko te lopte. Dokazati.

Rešenje:

$$P_L = M_V,\ 2R = H,\ P_L = 4R^2\pi$$



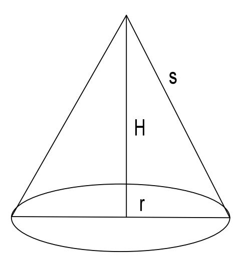


$$M_V = 2R\pi H = 2R\pi \cdot 2R = 4R^2\pi = P_L$$
$$\Rightarrow P_L = M_V$$

50. Visina kupe je 12cm, a površina osnog preseka je 42 cm². Odrediti površinu osnove i izvodnicu kupe.

Rešenje:

$$H = 12cm$$
$$P_{OP} = 42cm^2$$
$$P_{OP} = \frac{2rH}{2} = rH$$
$$42 = r \cdot 12 \Rightarrow r = 3.5cm$$



$$B = r^2\pi = 3.5^2\pi = 12.25 \cdot 3.14 = 38.465cm^2$$

$$s = \sqrt{r^2 + H^2} = \sqrt{(3.5)^2 + 12^2} = \sqrt{12.25 + 144} = \sqrt{156.25} = 12.5cm$$

IX ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNI

Tačka

1. Rastojanje između dve tačke

Neka su u odnosu na izabrani koordinatni sistem XOY date tačke $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$. Njihovo rastojanje određuje se pomoću formule:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

2. Deljenje duži u datoj razmeri. Koordinate sredine duži.

Ako je tačka $M(x, y)$ unutrašnja tačka duži M_1M_2 ($M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$) i ako je data razmera $\lambda = \dfrac{MM_1}{MM_2}$ u kojoj tačka M deli duž M_1M_2, onda se koordinate tačke M određuju obrascima:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\ .$$

Ako je tačka M središte duži M_1M_2 ($\lambda = 1$) njene koordinate su:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}\ .$$

3. Površina trougla

Neka su $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ temena datog trougla $M_1M_2M_3$ određena pomoću naznačenih koordinata u odnosu na izabrani pravougli koordinatni sistem XOY. Tada je površina trougla data obrascem:

$$P = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|.$$

Prava linija

1. Jednačina $y = kx + n$ predstavlja ***eksplicitni oblik jednačine prave***; $k = tg\alpha$ je *koeficijent pravca prave*; α je *ugao* koji prava gradi sa pozitivnim delom x-ose, a n je odsečak koji prava odseca na ordinatnoj (y) osi. Odsečak koji prava odseca na apscisnoj (x) osi je $m = -\dfrac{n}{k}$.

2. Jednačina $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$, ($m\neq 0, n\neq 0$) predstavlja ***segmentni oblik jednačine prave***; m i n su odsečci prave na koordinatnim osama.
3. Jednačina $Ax+By+C=0$, naziva se ***opšti oblik jednačine prave*** ili Dekartova jednačina prave linije, gde su A, B i C realni parametri.
4. ***Tangens ugla φ, koji grade dve prave koje se seku***, a čiji su koeficijenti k_1 i k_2 određuje se obrascem:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \text{ (orijentisani ugao); } tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right| \text{ (apsolutni ugao);}$$

5. Koeficijenti pravaca k_1 i k_2 ***paralelnih pravih*** zadovoljavaju uslov $k_1=k_2$.
6. Dve ***prave su normalne*** ako njihovi koeficijenti pravaca zadovoljavaju uslov: $k_1=-\frac{1}{k_2}$.
7. ***Jednačina pramena pravih*** koje prolaze kroz datu tačku $M(x_1, y_1)$, a imaju proizvoljni koeficijent k ima oblik: $y-y_1=k(x-x_1)$.
8. Jednačina $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ predstavlja ***pravu liniju koja prolazi kroz dve date tačke*** $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$; izraz $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ je njen ***koeficijent pravca***.
9. ***Odstojanje*** d ***tačke*** $M(x_1, y_1)$ ***od prave*** $Ax+By+C=0$ dato je formulom:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

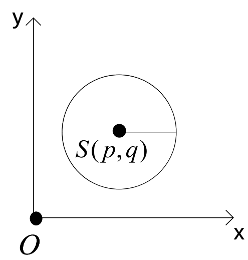
Kružnica

Kružnica je skup tačaka u ravni čija su rastojanja od jedne stalne tačke, jednaka datoj veličini.

Jednačina kružnice

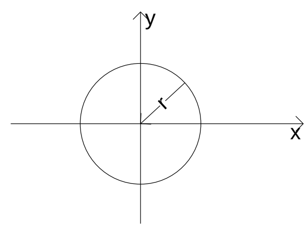
Opšta jednačina kružnice je:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$



gde je $S(p,q)$ ***centar kružnice***, a r ***poluprečnik***. Ako se centar kružnice nalazi u koordinatnom početku onda je $p = q = 0$, pa jednačina kružnice ima oblik:

$$x^2 + y^2 = r^2 .$$



Ako je jednačina kružnice data u obliku

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

tada je

$$p = -\frac{d}{2},\ q = -\frac{e}{2} \text{ i } r = \sqrt{p^2 + q^2 - f}$$

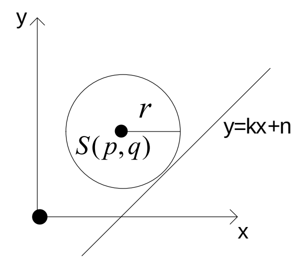
Prava i kružnica

Prava $y = kx + n$ je *tangenta kružnice* $x^2 + y^2 = r^2$, ako je zadovoljena relacija

$$r^2(k^2 + 1) = n^2 .$$

Prava $y = kx + n$ je *tangenta kružnice* $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$, ako je zadovoljena relacija:

$$r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2 .$$



Prava $Ax+By+C=0$ je *tangenta kružnice* $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$, ako je zadovoljena relacija:

$$r^2=\frac{(Ap+Bq+C)^2}{A^2+B^2}.$$

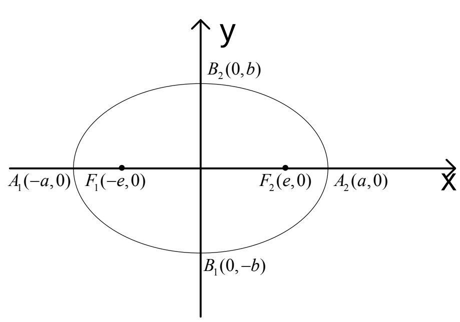
Ako je $M(x_1,y_1)$ neka tačka kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$, ***jednačina tangente kružnice u toj tački*** glasi:

$$(x-p)(x_1-p)+(y-q)(y_1-b)=r^2.$$

Elipsa

Elipsa je skup tačaka u ravni s osobinom da je zbir rastojanja ma koje tačke od dveju datih tačaka stalan broj.

Zbir rastojanja $r_1+r_2=2a$, r_1 i r_2 su ***potezi elipse***; stalne tačke $F_1(-e,0)$ i $F_2(e,0)$, čije je rastojanje $F_1F_2=2e$ nazivaju se ***žižama elipse***. Duži $A_1A_2=2a$ i $B_1B_2=2b$ su ***velika i mala osa***; a duži $OA_2=a$ i $OB_2=b$ su *poluose elipse*. Broj $e=\sqrt{a^2-b^2}$, ($e<a$) je ***linearna ekscentričnost elipse***.



Jednačina elipse

Jednačina $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ili $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ $(a>b)$ predstavlja ***centralnu jednačinu elipse***.

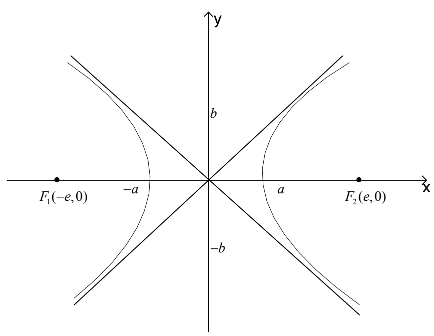
Prava $y=kx+n$ ***dodiruje elipsu*** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ako je $a^2k^2+b^2=n^2$.

Jednačina tangente elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ***u njenoj tački*** $M(x_1,y_1)$ je $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$.

Hiperbola

Hiperbola je skup tačaka u ravni s osobinom da je razlika rastojanja ma koje tačke od dveju datih tačaka stalan broj.

Razlika rastojanja označava se sa $r_1-r_2=2a$, ($a>0$), r_1 i r_2 su ***potezi hiperbole***; stalne tačke $F_1(-e,0)$ i $F_2(e,0)$, čije je rastojanje $F_1F_2=2e$ nazivaju se ***žižama hiperbole*** ($a<e$). Broj $e=\sqrt{a^2+b^2}$ je ***linearni ekscentritet hiperbole***.



Jednačina hiperbole

Jednačina $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ili $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ predstavlja ***centralnu jednačinu hiperbole.***

Prava $y=kx+n$ ***dodiruje hiperbolu*** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ako je $a^2k^2-b^2=n^2$.

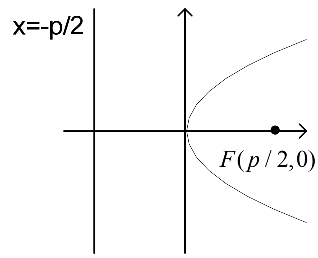
Prave $y=\frac{b}{a}x$ i $y=-\frac{b}{a}x$ su jednačine ***asimptote hiperbole***.

Jednačina tangente hiperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ***u njenoj tački*** $M(x_1,y_1)$ je $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$.

Parabola

Parabola je skup tačaka u ravni s osobinom da je rastojanje svake tačke od jedne stalne tačke jednako odstojanju te tačke od jedne stalne prave.

Stalna tačka $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ je ***žiža parabole***, a stalna prava čija je jednačina $x+\frac{p}{2}=0$ je ***direktrisa parabole***.



Odstojanje tačke F od direktrise obeležava se sa p i naziva se ***parametar parabole***; koordinatni početak je ***teme parabole***.

Jednačina parabole

Jednačina $y^2=2px$ predstavlja ***konačni oblik jednačine parabole***, koja leži u desnoj poluravni, ima teme u koordinatnom početku, a osa joj se poklapa sa osom Ox .

Jednačina $y^2=-2px$ predstavlja ***konačni oblik jednačine parabole***, koja leži u levoj poluravni, ima teme u koordinatnom početku, a osa joj se poklapa sa osom Ox .

Prava $y=kx+n$ ***dodiruje parabolu*** $y^2=2px$ ako je $p^2=2knp$.

Jednačina tangente parabole $y^2=2px$ ***u njenoj tački*** $M(x_1,y_1)$ je $yy_1=p(x+x_1)$.

51. Na y-osi odrediti onu tačku koja je podjednako udaljena od tačaka $A(2,-4)$ i $B(6,-2)$.

Rešenje:

Kako tačka pripada y-osi tražimo je u obliku $C(0,y)$.

$d(A,C)=d(B,C)$

Koristeći formulu za rastojanje između dve tačke $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ dobijamo:

$$\sqrt{(0-2)^2+(y+4)^2}=\sqrt{(0-6)^2+(y+2)^2}\ /^2$$

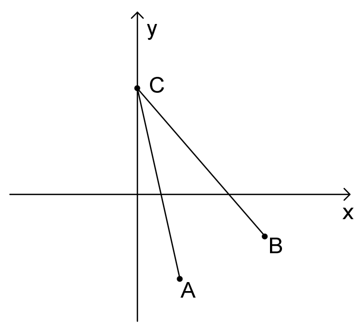
$$4+(y+4)^2=36+(y+2)^2$$

$$4+\cancel{y^2}+8y+16=36+\cancel{y^2}+4y+4$$

$$8y-4y=40-20$$

$$4y=20$$

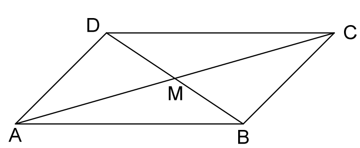
$$y=5$$



52. Data su dva susedna temena paralelograma $A(-3,5)$ i $B(1,7)$, kao i presečna tačka dijagonala $M(1,1)$. Odrediti koordinate druga dva temena.

Rešenje:

Treba odrediti temena $C(x_1,y_1)$ i $D(x_2,y_2)$.



Kako se dijagonale paralelograma polove, to je tačka M središte duži AC i BD.

Iz relacije da je M središte duži AC dobijamo:

$$\frac{-3+x_1}{2}=1 \Rightarrow \quad -3+x_1=2 \Rightarrow x_1=5$$

$$\frac{5+y_1}{2}=1 \Rightarrow \quad 5+y_1=2 \Rightarrow y_1=-3$$

Iz relacije da je M središte duži BD dobijamo:

$$\frac{1+x_2}{2}=1 \Rightarrow \quad 1+x_2=2 \Rightarrow x_2=1$$

$$\frac{7+y_2}{2}=1 \Rightarrow \quad 7+y_2=2 \Rightarrow y_2=-5$$

Tražena temena su $C(5,-3)$ i $D(1,-5)$.

53. Tačke $A(-4,-2)$, $B(2,4)$ i $C(-3,y)$ su temena trougla. Odrediti y tako da površina trougla bude 21.

Rešenje :

Polazimo od obrasca za površinu trougla:

$$P=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

$$21=\frac{1}{2}\left|-4(4-y)+2(y+2)-3(-2-4)\right|$$

$$42=\left|-16+4y+2y+4+18\right|$$

$$42=\left|6y+6\right|$$

$$42=\left|6y+6\right|=\begin{cases}6y+6, & y>\text{-}1\\ \text{-}(6y+6), & y<\text{-}1\end{cases}$$

Prvo rešenje:

$$42=6y+6 \Rightarrow \quad 6y=36 \Rightarrow \quad y=6$$

Drugo rešenje:

$$42=-(6y+6) \Rightarrow \quad 6y=-48 \Rightarrow \quad y=-8.$$

54. Temena trougla su $A(2,-4)$, $B(7,6)$ i $C(12,1)$. Tačka M deli stranu AB u razmeri 2:3, a tačka N stranu BC u razmeri 3:2; odrediti:

a) površine trougova ABC, MNB i površinu trapeza $ACMN$

b) razmeru površina trouglova ABC i MNB

Rešenje:

a) S obzirom da tačka $M(x_M, y_M)$ deli stranu AB u razmeri 2:3 to je $\frac{2}{3} = \frac{AM}{MB}$. Na osnovu ove razmere određujemo koordinate tačke M:

$$x_M = \frac{2 + \frac{2}{3}\cdot 7}{1 + \frac{2}{3}} = 4,\ y_M = \frac{-4 + \frac{2}{3}\cdot 6}{1 + \frac{2}{3}} = 0$$

$M(4,0)$

S obzirom da tačka $N(x_N, y_N)$ deli stranu BC u razmeri 3:2 to je $\frac{3}{2} = \frac{BN}{NC}$. Na osnovu ove razmere određujemo koordinate tačke N:

$$x_N = \frac{7 + \frac{3}{2}\cdot 12}{1 + \frac{3}{2}} = 10,\ y_N = \frac{6 + \frac{3}{2}\cdot 1}{1 + \frac{3}{2}} = 3$$

$N(10,3)$

Površina trougla MNB:

$$P_{\triangle MNB} = \frac{1}{2}\left|4\cdot(3-6) + 10\cdot(6-0) + 7\cdot(0-3)\right| = \frac{27}{2}$$

Površina trougla ABC:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|2\cdot(6-1) + 7\cdot(1+4) + 12\cdot(-4-6)\right| = \frac{75}{2}$$

Površina trapeza $ACMN$:

$$P_{\square ACMN} = P_{\triangle ABC} - P_{\triangle MNB} = \frac{75}{2} - \frac{27}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

b) $$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle MNB}} = \frac{\frac{75}{2}}{\frac{27}{2}} = \frac{25}{9}$$

$P_{\triangle ABC} : P_{\triangle MNB} = 25:9$

55. U jednačini $3y-5x+4p-3=0$ odrediti parametar p tako da prava:

a) prolazi kroz koordinatni početak

b) da odseca na y-osi odsečak 3.

Rešenje:

Jednačinu $3y-5x+4p-3=0$ svodimo na eksplicitni oblik:

$$y=\frac{5}{3}x+\frac{-4p+3}{3}$$

a) Kako prava prolazi kroz koordinatni početak, tačka $O(0,0)$ zadovoljava jednačinu prave:

$$0=0+\frac{-4p+3}{3}\Rightarrow\ -4p+3=0\Rightarrow\ p=\frac{3}{4}$$

b) Odsečak n na y-osi je 3, odnosno $\frac{-4p+3}{3}=3\Rightarrow\ -4p+3=9\Rightarrow\ p=-\frac{3}{2}$

56. Prava prolazi kroz tačku $M(-5,4)$ i sa koordinatnim osama zaklapa trougao površine $P=5$. Odrediti njenu jednačinu.

Rešenje:

Jednačinu prave tražimo u obliku $y=kx+n$

$$P_{\triangle AOB}=5\Rightarrow\ 5=\frac{x_1y_1}{2}$$

$$x_1=-\frac{n}{k},\ y_1=n\Rightarrow-\frac{n^2}{k}=10\Rightarrow\ k=-\frac{n^2}{10}$$

Kako tačka $M(-5,4)$ pripada pravoj, ona zadovoljava njenu jednačinu: $4=-5k+n$.

Rešavamo sistem:

$$\begin{cases}4=-5k+n\\ k=-\dfrac{n^2}{10}\end{cases}\Rightarrow n^2+2n-8=0$$

Rešenja sistema su:

$n_1 = -4,\ k_1 = -\frac{8}{5}$

$n_2 = 2,\ k_2 = -\frac{2}{5}$

Dobijamo dve prave koje zadovoljavaju postavljene uslove:

$y = -\frac{8}{5}x - 4$ i $y = -\frac{2}{5}x + 2$.

57. Odrediti ugao pod kojim se seku prave:

a) $x + 2y - 9 = 0$ i $x - 3y + 14 = 0$

b) $x\sqrt{3} - y + 4 = 0$ i $x\sqrt{3} + y - 4 = 0$

Rešenje:

a) Zapišimo prave u eksplicitnom obliku: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ i $y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$

Koeficijenti pravca ovih pravih su $k_1 = -\frac{1}{2}$ i $k_2 = \frac{1}{3}$. Koristeći obrazac $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ dobijamo $tg\varphi = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow\ \varphi = 45°$. Ako uzmemo $k_1 = \frac{1}{3}$ i $k_2 = -\frac{1}{2}$ dobijamo $tg\varphi = -1 \Rightarrow\ \varphi = 135°$

a) $y = \sqrt{3}x + 4\quad y = -\sqrt{3}x + 4$, $k_1 = \sqrt{3}$ i $k_2 = -\sqrt{3}$

$tg\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow\ \varphi = 60°$

U slučaju $k_1 = -\sqrt{3}$ i $k_2 = \sqrt{3}$ dobijamo $tg\varphi = -\sqrt{3} \Rightarrow\ \varphi = 120°$.

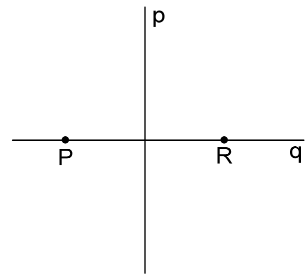
58. Odrediti tačku R simetričnu s tačkom $P(-5,13)$ u odnosu na pravu $2x - 3y - 3 = 0$.

Rešenje:

Obeležimo datu pravu sa $p: 2x - 3y - 3 = 0$ i zapišimo je u eksplicitnom obliku: $y = \frac{2}{3}x - 1$.

Neka tačke P i R pripadaju nekoj pravoj q, koja je zbog simetričnosti tačaka normalna na pravu p.

Koristeći obrazac za jednačinu prave kroz dve tačke dobijamo jednačinu prave q: $y-13=\frac{y_R-13}{x_R+5}(x+5)$, gde su x_R i y_R koordinate tačke R koje treba odrediti.



S obzirom da su prave ortogonalne imamo da je $k_p \cdot k_q = -1$, gde su k_p i k_q koeficijenti pravaca pravih.

$$k_p=\frac{2}{3} \Rightarrow k_q=-\frac{3}{2}$$

$$\frac{y_R-13}{x_R+5}=-\frac{3}{2} \Rightarrow y_R=\frac{11-3x_R}{2}$$

Kako su tačke P i R simetrične u odnosu na pravu p imamo da je $d(P,p)=d(R,p)$

$$\frac{|2\cdot(-5)-3\cdot 13-3|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|2x_R-3y_R-3|}{\sqrt{2^2+3^2}}$$

$$52=2x_R-3y_R-3$$

$$52=2x_R-3\frac{11-3x_R}{2}-3\ /\cdot 2$$

$$104=4x_R-33+9x_R-6$$

$$143=13x_R$$

$$11=x_R \Rightarrow y_R=\frac{11-3x_R}{2}=\frac{11-33}{2}=-11$$

Tačka simetrična tački P je $R(11,-11)$.

59. Naći jednačinu prave koja prolazi kroz presek y-ose i prave $3x+2y-6=0$ i paralelna je pravoj $x-2y+3=0$.

Rešenje:

Treba odrediti presečnu tačku y -ose i prave $3x+2y-6=0$. Rešavamo sistem:

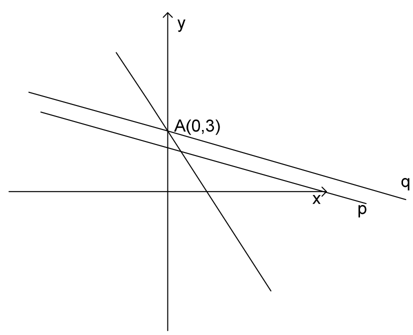
$$\begin{cases} x=0 \\ 3x+2y-6=0 \end{cases}$$

Rešenje je tačka $A(0,3)$. Dakle treba odrediti jednačinu prave q koja sadrži tačku A i paralelna je pravoj $x-2y+3=0$. Paralelne prave imaju jednake koeficijente pravaca.

$$p: \ x-2y+3=0 \Rightarrow \ y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \Rightarrow \ k_p=\frac{1}{2} \Rightarrow k_q=\frac{1}{2}$$

Jednačinu prave q tražimo u obliku $y=k_q x+n_q$, odnosno $y=\frac{1}{2}x+n_q$. Tačka $A(0,3)$ pripada traženoj pravoj: $3=0+n_q \Rightarrow \ n_q=3$.

Tražena prava ima jednačinu: $y=\frac{1}{2}x+3$.



60. Iz tačke $A(6,9)$ polazi svetlosni zrak pod uglom od $45°$ prema pozitivnom delu ose Ox, dolaskom do ose Ox zrak se odbije od nje. Odrediti jednačinu padajućeg i odbijenog zraka.

Rešenje:

Padajući zrak sadrži tačku $A(6,9)$ i pada pod uglom od $45° \Rightarrow \ k=tg45°=1$

$$y=kx+n \Rightarrow \ 9=6+n \Rightarrow \ n=3$$

Jednačina padajućeg zraka: $y=x+3$.

Ugao pod kojim zrak pada jednak je uglu pod kojim se zrak odbija, što znači da je ugao koji odbijeni zrak zaklapa za pozitivnim delom ose Ox $135°$, odnosno $k = tg135° = -1$.

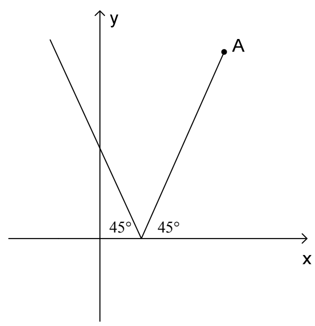
Padajući zrak seče osu Ox u tački koji dobijamo rešavanjem sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow x = -3$$

Rešenje je tačka $B(-3, 0)$ koja pripada i odbijenom zraku:

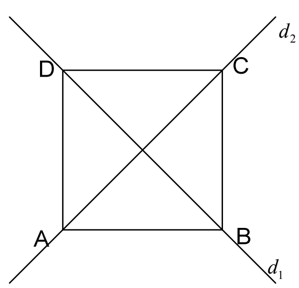
$y = kx + n \Rightarrow\ 0 = 3 + n \Rightarrow\ n = -3$

Jednačina odbijenog zraka: $y = -x - 3$.



61. Tačka $A(-4, 5)$ je teme kvadrata čija dijagonala leži na pravoj $7x - y + 8 = 0$. Napisati jednačine stranica i druge dijagonale kvadrata.

Rešenje:



Zamenjujući koordinate tačke A u jednačinu $7x - y + 8 = 0$ vidimo da joj ona ne pripada.

$d_1 : 7x - y + 8 = 0$, $A \in d_2$

$d_1 \perp d_2 \Rightarrow\ k_{d_1} k_{d_2} = -1$, $k_{d_1} = 7 \Rightarrow\ k_{d_2} = -\dfrac{1}{7}$

$$d_2:\ y-5=-\frac{1}{7}(x+4)\Rightarrow\ 7y+x-31=0\ .$$

Tražimo presečnu tačku S dijagonala kvadrata. Rešavamo sistem:

$$\begin{cases}7x-y+8=0\\ x+7y-31=0\end{cases}\Rightarrow\ x=-\frac{1}{2},y=\frac{9}{2}$$

$$S\left(-\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right),\ x_S=-\frac{1}{2},y_S=\frac{9}{2}$$

Određujemo koordinate temena $C(x_C,y_C)$

$$x_S=\frac{x_A+x_C}{2}\Rightarrow\ x_C=2x_S-x_A\Rightarrow\ x_C=3$$

$$y_S=\frac{y_A+y_C}{2}\Rightarrow\ y_C=2y_S-y_A\Rightarrow\ y_C=4$$

$$d(A,S)=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+4\right)^2+\left(\frac{9}{2}-5\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$d(A,S)=d(B,S)=d(D,S)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$d(A,S)=d(B,S)=d(D,S)=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2}$$

Tačke B i D pripadaju dijagonali $d_1:7x-y+8=0$.

Rešavamo sistem:

$$\begin{cases}7x-y+8=0\\ \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2}=\frac{50}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=7x+8\\ 50x^2+50x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0,y_1=8\\ x_2=-1,y_2=1\end{cases}$$

$B(-1,1),D(0,8)$

Jednačina stranice AB:

$$y-1=\frac{5-1}{-4+1}(x+1)\Rightarrow\ 3y+4x+1=0$$

Jednačina stranice BC:

$$y-4=\frac{1-4}{-1-3}(x-3)\Rightarrow\ 4y-3x-7=0$$

Jednačina stranice AD:

$$y-8=\frac{5-8}{-4}x \Rightarrow \; 4y-3x-32=0$$

Jednačina stranice DC:

$$y-8=\frac{4-8}{3}x \Rightarrow \; 3y+4x\text{ - }24=0$$

62. Odrediti jednačinu kružnice koja prolazi kroz tačke $A(3,1)$ i $B(6,4)$, a centar joj se nalazi na y-osi.

Rešenje:

$S(p,q)$-centar kružnice

Pošto se centar kružnice nalazi na y-osi $\Rightarrow p=0$

Tačke $A(3,1)$ i $B(6,4)$ zadovoljavaju jednačinu kružnice: $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$

$$(3-0)^2+(1-q)^2=r^2$$
$$(6-0)^2+(4-q)^2=r^2$$

$$(3-0)^2+(1-q)^2=(6-0)^2+(4-q)^2$$
$$6q=42 \Rightarrow \; q=7$$

$$r^2=9+(1-7)^2=45$$

Jednačina kružnice je $x^2+(y-7)^2=45$

63. Kroz tačku $A(-1,y)$ kružnice $x^2+y^2-2x+6y+5=0$ povučena je tetiva koja je paralelna sa pravom $x-3y+7=0$. Odrediti jednačinu tetive i njenu drugu presečnu tačku.

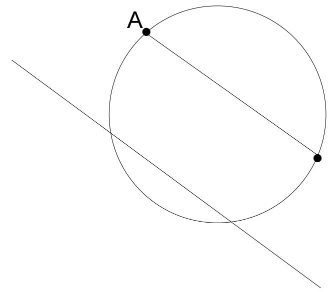
Rešenje:

Prvo treba odrediti drugu koordinatu tačke A:

$$1+y^2+2+6y+5=0$$
$$y^2+6y+8=0 \Rightarrow \; y_1=-2, y_2=-4$$

Dakle postoje dve tačke: $A_1(-1,-2)$ i $A_2(-1,-4)$.

Tetiva je paralelna sa pravom $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$, pa su im koeficijenti pravaca jednaki, $k_t=\frac{1}{3}$, k_t -koeficijent pravca tetive.



Jednačina tetive koja prolazi kroz tačku $A_1(-1,-2)$ je $y+2=\frac{1}{3}(x+1)$ odnosno $x-3y-5=0$. Tražimo drugu presečnu tačku sa kružnicom. Rešavamo sistem:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+6y+5=0 \\ x=3y+5 \end{cases} \Rightarrow (3y+5)^2+y^2 \ \text{-}6y\text{-}10+6y+5=0$$

$$\Rightarrow\ y^2+3y+2=0 \Rightarrow\ y_1=-2, y_2=-1 \Rightarrow x_1=-1, x_2=2$$

Druga presečna tačka je $B_1(2,-1)$.

Jednačina tetive koja prolazi kroz tačku $A_1(-1,-4)$ je $y+4=\frac{1}{3}(x+1)$ odnosno $x-3y-11=0$. Tražimo drugu presečnu tačku sa kružnicom. Rešavamo sistem:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+6y+5=0 \\ x=3y+11 \end{cases} \Rightarrow (3y+11)^2+y^2 \ \text{-}6y\text{-}22+6y+5=0$$

$$\Rightarrow\ 5y^2+33y+52=0 \Rightarrow\ y_1=-4, y_2=-\frac{13}{5} \Rightarrow x_1=-1, x_2=\frac{16}{5}$$

Druga presečna tačka je $B_2(\frac{16}{5},-\frac{13}{5})$.

64. Odrediti položaj prave i kružnice:

a) $x+y-9=0$ i $(x-2)^2+(y-1)^2=25$

b) $x+y+4=0$ i $x^2+y^2-2y-3=0$

c) $4x+3y-36=0$ i $x^2+y^2-4x-2y-20=0$

Rešenje:

Napomena:

Neka je data prava $t: Ax+By+C=0$ i kružnica $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$, gde je $S(p,q)$-centar kružnice, r-poluprečnik kružnice.

Ako je $d(S,t)<r$ prava seče kružnicu.

Ako je $d(S,t)=r$ prava dodiruje kružnicu.

Ako je $d(S,t)>r$ prava i kružnica nemaju zajedničkih tačaka.

a) $t: x+y-9=0$, $(x-2)^2+(y-1)^2=25$

$S(2,1),\ r=5$

$d(S,t)=\dfrac{|2+1-9|}{\sqrt{2}}=\dfrac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}<5 \Rightarrow$ prava seče kružnicu

b) $t: x+y+4=0$, $x^2+y^2-2y-3=0$, $p=-\dfrac{d}{2}=0,\ q=-\dfrac{e}{2}=1$,

$r=\sqrt{p^2+q^2-f}=2$, $S(0,1),\ r=2$

$d(S,t)=\dfrac{|0+1+4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}>2 \Rightarrow$ prava i kružnica nemaju zajedničkih tačaka

c) $t: 4x+3y-36=0$, $x^2+y^2-4x-2y-20=0$, $p=2,\ q=1,\ \ r=5$

$d(S,t)=\dfrac{|8+3-36|}{5}=\dfrac{25}{5}=5=r \Rightarrow$ prava dodiruje kružnicu.

65. Iz tačke $A(-5,7)$ van kružnice povučene su tangente na kružnicu $x^2+y^2+8x-9=0$. Odrediti:

a) površinu trougla čija su temena data tačka i dodirne tačke pomenutih tangenata;

b) jednačinu kružnice opisane oko tako dobijenog trougla

c) ugao pod kojim ova kružnica seče datu kružnicu

d) jednačinu zajedničke sečice ovih kružnica.

Rešenje:

a) Treba odrediti jednačine povučenih tangenata $y=kx+n$

$x^2+y^2+8x-9=0$, $p=-\frac{d}{2}=-4,\ q=-\frac{e}{2}=0$, $r=\sqrt{p^2+q^2-f}=5$

Tačka A pripada traženoj tangenti : $7=-5k+n$

Uslov dodira prave i kružnice: $r^2(k^2+1)=(kp-q+n)^2 \Rightarrow\ 25(k^2+1)=(-4k+n)^2\ \Rightarrow$

$$25(k^2+1)=(-4k+7+5k)^2 \Rightarrow\ 12k^2-7k-12=0 \Rightarrow\ k_1=-\frac{3}{4}, k_2=\frac{4}{3}$$

$$n_1=7+5k_1=\frac{13}{4},\ n_2=7+5k_2=\frac{41}{3}$$

Jednačine tangenata iz tačke A su:

$$t_1: y=-\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$$

$$t_2: y=\frac{4}{3}x+\frac{41}{3}$$

Treba odrediti u kojim tačkama ove tangente dodiruju kružnicu.

Rešavamo sisteme:

$$\begin{cases} x^2+y^2+8x-9=0 \\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{13}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2+(-\frac{3}{4}x+\frac{13}{4})^2+8x-9=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$$

$y=4$

Tačka $B(-1,4)$

$$\begin{cases} x^2+y^2+8x-9=0 \\ y=\frac{4}{3}x+\frac{41}{3} \end{cases} \Rightarrow x^2+(\frac{4}{3}x+\frac{41}{3})^2+8x-9=0 \Rightarrow (x+8)^2=0 \Rightarrow x=-8$$

$y=3$

Tačka $C(-8,3)$

Treba odrediti površinu trougla čija su temena: $A(-5,7)$, $B(-1,4)$, $C(-8,3)$

$$P=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|=\frac{1}{2}\left|-5(4-3)-1(3-7)-8(7-4)\right|=12,5$$

b) Tačke $A(-5,7)$, $B(-1,4)$, $C(-8,3)$ pripadaju traženoj kružnici:

$$(-5-p)^2+(7-q)^2=r^2$$

$$(-1-p)^2+(4-q)^2=r^2$$

$$(-8-p)^2+(3-q)^2=r^2$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}(-5-p)^2+(7-q)^2=(-1-p)^2+(4-q)^2 \\ 8p-6q=-57\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}(-8-p)^2+(3-q)^2=(-1-p)^2+(4-q)^2 \\ -14p-2q=56\end{array}$$

Rešavamo sistem:

$$\begin{array}{l}8p-6q=-57 \\ -14p-2q=56\end{array}, \; p=-\frac{9}{2}, q=\frac{7}{2}, r^2=\frac{50}{4}$$

Tražena kružnica:

$$(x+\frac{9}{2})^2+(y-\frac{7}{2})^2=\frac{50}{4} \Rightarrow \; x^2+y^2+9x-7y+20=0$$

c) Da bismo odredili ugao pod kojim se seku kružnice, treba konstruisati tangente na kružnice u presečnim tačkama ovih kružnica. Ugao između tangenata daće nam ugao pod kojim se seku kružnice.

Kružnice se seku u tačkama $B(-1,4), C(-8,3)$.

Kroz tačku $B(-1,4)$ postavićemo tangente na kružnice:

Tangentu na kružnicu $x^2+y^2+8x-9=0$ smo već odredili: $y=-\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$

Treba odrediti jednačinu tangente na kružnicu $x^2+y^2+9x-7y+20=0$

$$x^2+y^2+9x-7y+20=0 \Rightarrow (x+\frac{9}{2})^2+(y-\frac{7}{2})^2=\frac{50}{4}$$

Tačka B pripada kružnici, pa koristeći obrazac $(x-p)(x_1-p)+(y-q)(y_1-b)=r^2$

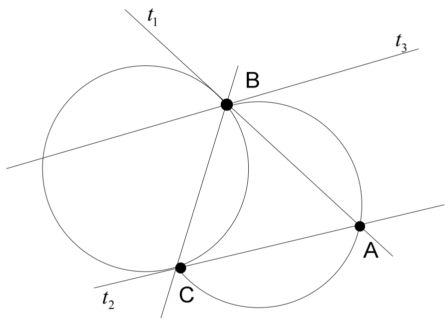
dobijamo jednačinu tangente : $(x+\frac{9}{2})(-1+\frac{9}{2})+(y-\frac{7}{2})(4-\frac{7}{2})=\frac{50}{4}$, tj.

$t_3: \; y=-7x-3, \; k_{t_3}=-7$

$$tg\varphi=\frac{-\frac{3}{4}+7}{1+\frac{3}{4}\cdot 7}=1 \Rightarrow \varphi{=}45°.$$

d) Zajednička sečica je prava koja prolazi kroz tačke $B(-1,4)$ i $C(-8,3)$:

$$y-3=\frac{4-3}{-1+8}(x+8) \Rightarrow \; 7y-x-29=0.$$



66. Pod kojim uglom se iz tačke $P(-6,3)$ vidi kružnica $x^2+y^2-6y=0$?

Rešenje:

Kroz tačku $P(-6,3)$ postavićemo tangente $t_{1,2}: y=kx+n$ na kružnicu $x^2+y^2-6y=0$.

$x^2+y^2-6y=0 \Rightarrow x^2+(y-3)^2=9$

$p=0, q=3, r=3$

Tačka P pripada tangenti $3=-6k+n$

Uslov dodira: $r^2(k^2+1)=(kp-q+n)^2 \Rightarrow 9(k^2+1)=(-3+3+6k)^2 \Rightarrow$

$27k^2=9$

$k_1=\frac{1}{\sqrt{3}}, k_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

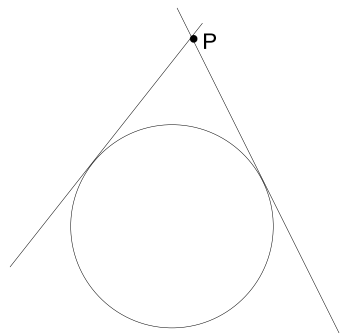
$n_1=3+\frac{6}{\sqrt{3}}, n_2=3-\frac{6}{\sqrt{3}}$

Jednačine tangenata:

$t_1: y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+3+\frac{6}{\sqrt{3}}$

$t_2: y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+3-\frac{6}{\sqrt{3}}$

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}}\right|=\sqrt{3}\ tg\varphi=\sqrt{3}\Rightarrow\ \varphi=60°$$



Dakle, kružnica se vidi pod uglom od $60°$.

67. Napisati jednačinu elipse, ako se dva njena temena nalaze u tačkama $A_1(8,0)$ i $A_2(-8,0)$, a žiže imaju koordinate $(\pm 5,0)$.

Rešenje:

Na osnovu temena $A_1(8,0)$ i $A_2(-8,0)$ zaključujemo da je $a = 8$.

Žiže su $F_1(5,0)$ i $F_2(-5,0) \Rightarrow e = 5$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} \ /^2$$

$$e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \ b^2 = a^2 - e^2 \ \Rightarrow b^2 = 64 - 25 = 39$$

Jednačina elipse:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$$

68. Odrediti zajedničke tačke elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ i kružnice, koja prolazi kroz žiže elipse, a centar joj je u temenu na pozitivnom delu ordinatne ose.

Rešenje:

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \ \Rightarrow \ a^2 = 4, b^2 = 1$$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

Žiže su $F_1(\sqrt{3},0)$ i $F_2(-\sqrt{3},0)$

Temena na ordinatnoj osi su $B_1(0,b)=B_1(0,1)$ i $B_2(0,-b)=B_2(0,-1)$

Dakle centar kružnice je tačka $B_1(0,1)$ a poluprečnik je $r=d(B_1,F_1)$

$r=d(B_1,F_1)=\sqrt{3+1}=2$

Jednačina kružnice je: $x^2+(y-1)^2=4$

Da bismo odredili presečne tačke elipse i kružnice, rešićemo sistem:

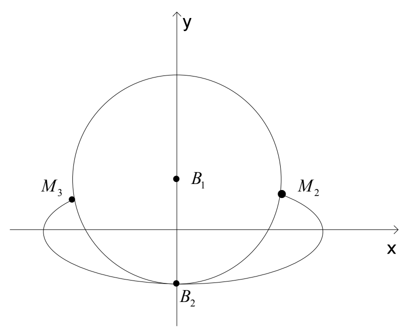
$$\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ x^2+(y-1)^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=4-4y^2 \\ x^2+(y-1)^2=4 \end{cases} \Rightarrow -3y^2-2y+1=0 \Rightarrow y_1=-1, y_2=\frac{1}{3}$$

$y_1=-1, x_1=0$

$y_2=\frac{1}{3}, x_2=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$y_3=\frac{1}{3}, x_3=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$

Presečne tačke su: $B_2(0,-1)$, $M_2(\frac{4\sqrt{2}}{3},\frac{1}{3})$, $M_3(-\frac{4\sqrt{2}}{3},\frac{1}{3})$.



69. Na pravoj $x=-5$ odrediti tačku podjednako udaljenu od leve žiže i temena koje pripada pozitivnom delu ordinatne ose elipse $x^2+5y^2=20$.

Rešenje:

$x^2+5y^2=20$

$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow a^2=20, b^2=4$

$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{20-4} = 4$

Žiže su $F_1(4,0)$ i $F_2(-4,0)$

Temena na ordinatnoj osi su $B_1(0,2)$ i $B_2(0,-2)$

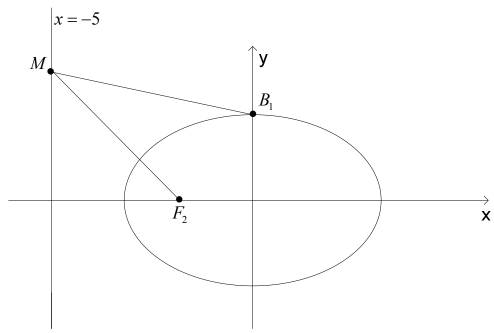
Tražimo tačku $M(-5,y)$ tako da je $d(M,F_2) = d(M,B_1)$

$d(M,F_2) = d(M,B_1) \Rightarrow \sqrt{(-4+5)^2 + y^2} = \sqrt{(-5)^2 + (y-2)^2} \ /^2$

$1 + y^2 = 25 + y^2 - 4y + 4$

$4y = 28 \Rightarrow y = 7$

Tražena tačka je $M(-5,7)$.



70. Tačka $M(x_1, y_1)$ na elipsi $2x^2 + 3y^2 = 35$ udaljena je od centra elipse za $d = \sqrt{17}$. Napisati jednačinu tangente elipse u toj tački.

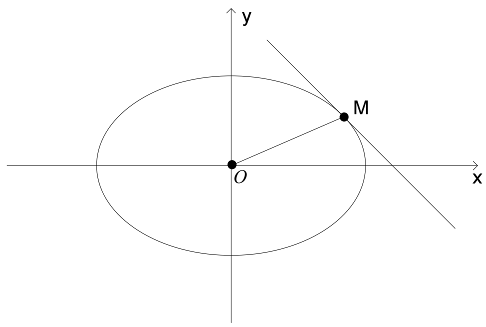
Rešenje:

$d = \sqrt{17} = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}$

Rešavamo sistem:

$$\begin{cases} 2x_1^{\,2} + 3y_1^{\,2} = 35 \\ x_1^{\,2} + y_1^{\,2} = 17 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \pm 4, y_1 = \pm 1$$

Imamo četiri tačke: $M_1(4,1)$, $M_2(4,-1)$, $M_3(-4,1)$, $M_4(-4,-1)$.



Konstruišimo tangentu $t_1 : y = kx + n$ u tački $M_1(4,1)$:

Uslov dodira tangente i elipse: $a^2k^2 + b^2 = n^2$

$2x^2 + 3y^2 = 35$

$$\frac{x^2}{\frac{35}{2}} + \frac{y^2}{\frac{35}{3}} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{35}{2}, b^2 = \frac{35}{3}$$

$$a^2k^2 + b^2 = n^2 \Rightarrow \frac{35}{2}k^2 + \frac{35}{3} = n^2 \Rightarrow 105k^2 + 70 = 6n^2$$

Tačka $M_1(4,1)$ pripada tangenti $t_1 : 1 = 4k + n$

Rešavamo sistem:

$$\begin{cases} 105k^2 + 70 = 6n^2 \\ 1 = 4k + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 105k^2 + 70 = 6(1-4k)^2 \\ 1 = 4k + n \end{cases} \Rightarrow 9k^2 + 48k + 64 = 0$$

$$k = -\frac{8}{3}, n = \frac{35}{3}$$

Tangenta u tački $M_1(4,1)$ je $t_1 : y = -\frac{8}{3}x + \frac{35}{3} \Rightarrow 8x + 3y - 35 = 0$.

Ponavljajući postupak dobijamo preostale tri tangente:

U tački $M_2(4,-1)$ je $t_2 : 8x - 3y - 35 = 0$

U tački $M_3(-4,1)$ je $t_3 : 8x - 3y + 35 = 0$

U tački $M_4(-4,-1)$ je $t_4 : 8x + 3y + 35 = 0$.

71. Napisati jednačinu hiperbole ako je razmera njenih poluosa $3:4$ i $e = 15$.

Rešenje:

$$a : b = 3 : 4 \Rightarrow 4a = 3b \Rightarrow a = \frac{3b}{4}$$

$e=\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow 15=\sqrt{a^2+b^2}$ $/^2$

$225=a^2+b^2 \Rightarrow 225=\dfrac{9b^2}{16}+b^2 \Rightarrow 225=\dfrac{25b^2}{16}$

$b^2=144 \Rightarrow b=12$

$a=9$

Jednačina hiperbole je: $\dfrac{x^2}{81}-\dfrac{y^2}{144}=1$.

72. Iz žiže hiperbole $9x^2-16y^2=144$ spuštena je normala na asimptotu. Izračunati površinu ograničenu ovom normalom, asimptotom i apscisnom osom.

Rešenje:

Površina ograničena normalom, asimptotom i apscisnom osom jeste pravougli trougao čija su temena žiža hiperbole, centar hiperbole i tačka koju dobijamo u preseku normale i asimptote. Zbog simetričnosti žiža i asimptota nije bitno koju ćemo žižu izabrati i na koju asimptotu ćemo spustiti normalu, rezultat će biti isti.

$9x^2-16y^2=144 \Rightarrow \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

$a^2=16, b^2=9$

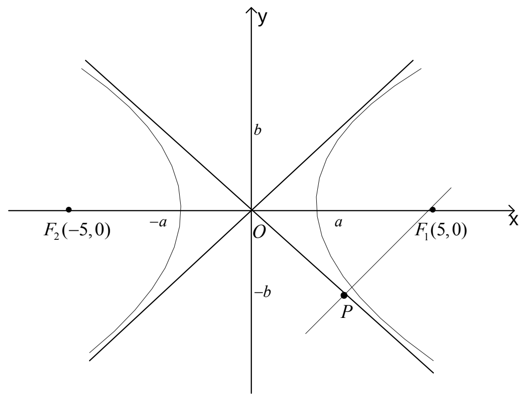
$e=\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow e=5$

Žiže su $F_1(5,0)$ i $F_2(-5,0)$.

Asimptote su:

$a_1: \ y=\dfrac{b}{a}x=\dfrac{3}{4}x$

$a_2: \ y=-\dfrac{b}{a}x=-\dfrac{3}{4}x$



Iz žiže $F_1(5,0)$ spuštamo normalu na asimptotu $a_2:\ y=-\frac{3}{4}x$

$k_n \cdot k_{a_2}=-1$, k_n, k_{a_2} -koeficijenti pravaca normale i asimptote.

$k_{a_2}=-\frac{3}{4} \Rightarrow k_n=\frac{4}{3}$

Jednačina normale: $y-0=\frac{4}{3}(x-5) \Rightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{20}{3}$

Tražimo presečnu tačku P asimptote i normale; rešavamo sistem:

$$\begin{cases} y=-\frac{3}{4}x \\ y=\frac{4}{3}x-\frac{20}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{4}x \\ -\frac{3}{4}x=\frac{4}{3}x-\frac{20}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{4}x \\ x=\frac{16}{5} \end{cases}$$

$P(\frac{16}{5},-\frac{12}{5})$.

Tražimo površinu trougla F_1OP:

$$P=\frac{1}{2}\left|0(0+\frac{12}{5})+5(-\frac{12}{5}-0)+\frac{16}{5}(0-0)\right|=6.$$

73. Kroz tačku $A(3,-1)$ povući tetivu hiperbole $x^2-4y^2=4$, koja je tom tačkom prepolovljena.

Rešenje:

Neka tražena tetiva seče hiperbolu u tačkama $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$. Tada je $x_1^2 - 4y_1^2 = 4$ i $x_2^2 - 4y_2^2 = 4$. Oduzimanjem ovih jednačina dobijamo sledeće:

$$x_2^2 - x_1^2 - 4(y_2^2 - y_1^2) = 0 \Rightarrow (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 4(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 0$$

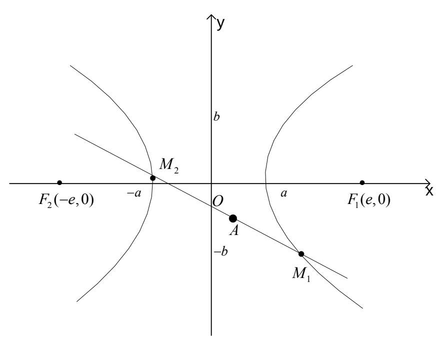
$$\frac{(x_2 + x_1)}{4(y_2 + y_1)} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Kako je tačka $A(3, -1)$ središte duži M_1M_2 imamo $x_1 + x_2 = 6, y_1 + y_2 = -2$, pa prethodna jednačina postaje:

$$\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{6}{4 \cdot (-2)} = -\frac{3}{4}.$$

Prema tome, koeficijent pravca tražene prave je $k = -\frac{3}{4}$.

Jednačina tetive kroz tačku $A(3, -1)$ je $y + 1 = -\frac{3}{4}(x - 3)$ tj. $3x + 4y - 5 = 0$.



74. Direktrisa parabole sa temenom u koordinatnom početku je prava $2x + 5 = 0$. Napisati jednačinu parabole i odrediti koordinate njene žiže.

Rešenje:

$$y^2 = 2px$$

Direktisa $x = -\frac{p}{2}$

$2x+5=0 \Rightarrow\ x=-\frac{5}{2} \Rightarrow\ p=5$

Jednačina parabole $y^2=10x$, žiža $F(\frac{p}{2},0)=F(\frac{5}{2},0)$.

75. Odrediti geometrijsko mesto sredine tetiva parabole $y^2=4x$, koje zaklapaju sa osom O_x ugao od $45°$.

Rešenje:

Neka tetiva seče parabolu u tačkama $M_1(x_1,y_1)$ i $M_2(x_2,y_2)$. Tada je $y_1^{\,2}=4x_1$ i $y_2^{\,2}=4x_2$. Oduzimanjem ovih jednačina dobijamo :

$$y_2^{\,2}-y_1^{\,2}=4(x_2-x_1) \Rightarrow\ (y_2-y_1)(y_2+y_1)=4(x_2-x_1)$$

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4}{y_2+y_1}$$

Koeficijent pravca tetive je $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$,a pošto tetiva zaklapa sa osom O_x ugao od $45°$, to je

$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=tg45°=1$.

Neka je tačka $M(x,y)$ središte duži M_1M_2.

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

$$x_1+x_2=2x,\ y_1+y_2=2y$$

Na osnovu ovih jednakosti jednačina $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4}{y_2+y_1}$ postaje:

$1=\frac{4}{2y}$, tj. $2y=4 \Rightarrow\ y=2$ je traženo geometrijsko mesto sredine tetiva parabole.

76. Prava $2x+y-12=0$ seče parabolu $y^2=4x$. Odrediti:

a) ugao između tangenata u tim tačkama

b) jednačinu tangente parabole, koja je paralelna sa datom pravom

c) jednačinu kružnice opisane oko trougla čija su temena presečne tačke date prave i parabole i presek tangenata povučenih na parabolu u tim tačkama

d) ugao pod kojim se seku data parabola i pomenuta kružnica.

Rešenje:

a) Tražimo presečne tačke prave i parabole; rešavamo sistem:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ 2x + y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ y = -2x + 12 \end{cases} \Rightarrow (-2x+12)^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$$

$x_1 = 9, y_1 = -6$

$x_2 = 4, y_2 = 4$

Dakle prava i parabola se seku u tačkama $M_1(9,-6)$ i $M_2(4,4)$

Konstruišimo tangentu $t_1 : y = kx + n$ u tački $M_1(9,-6)$:

Uslov dodira tangente i parabole: $p = 2kn$

$y^2 = 4x \Rightarrow \ p = 2$

$2 = 2kn \Rightarrow \ 1 = kn \Rightarrow \ n = \dfrac{1}{k}$

Tačka $M_1(9,-6)$ pripada tangenti $-6 = 9k + n$

Rešavamo sistem:

$$\begin{cases} -6 = 9k + n \\ n = \dfrac{1}{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 = 9k + \dfrac{1}{k} \\ n = \dfrac{1}{k} \end{cases} \Rightarrow 9k^2 + 6k + 1 = 0$$

$k = -\dfrac{1}{3}, n = -3$

Tangenta u tački $M_1(9,-6)$ je $t_1 : y = -\dfrac{1}{3}x - 3 \Rightarrow \ x + 3y + 9 = 0$.

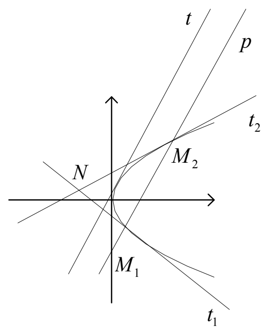
Ponavljajući postupak dobijamo da je tangenta u tački $M_2(4,4)$:

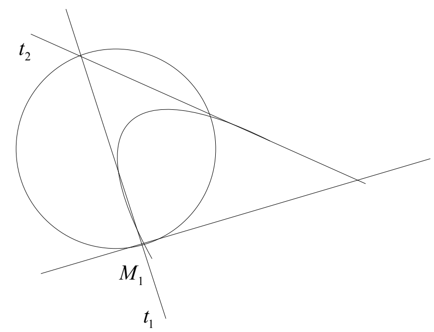
$t_2 : y = \dfrac{1}{2}x + 2 \Rightarrow \ x - 2y + 4 = 0$

$k_{t_1} = -\dfrac{1}{3}$, $k_{t_2} = \dfrac{1}{2}$, k_{t_1}, k_{t_2} -koeficijenti pravaca tangenata

$$tg\varphi = \frac{k_{t_2} - k_{t_1}}{1 + k_{t_1} k_{t_2}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \varphi = 45°$$

Ugao između tangenata je $45°$.





b) Obeležimo datu pravu sa p i traženu tangentu sa t.

$2x + y - 12 = 0 \Rightarrow y = -2x + 12$

$p \parallel t \Rightarrow k_p = k_t = -2$

Iz uslova dodira $1 = kn$ dobijamo $n = -\frac{1}{2}$.

Jednačina tangente je : $y = -2x - \frac{1}{2} \Rightarrow 4x + 2y + 1 = 0$

c) Tražimo presečnu tačku tangenata, rešavamo sistem:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x - 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 = -\frac{1}{3}x - 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{6}x = -5 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow x = -6, y = -1$$

Treba odrediti jednačinu kružnice $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ kojoj pripadaju tačke $M_1(9,-6)$, $M_2(4,4)$ i $N(-6,-1)$:

$(9-p)^2 + (-6-q)^2 = r^2$

$(4-p)^2 + (4-q)^2 = r^2$

$(-6-p)^2 + (-1-q)^2 = r^2$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}(9-p)^2+(-6-q)^2=(4-p)^2+(4-q)^2\\ -2p+4q=-17\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}(9-p)^2+(-6-q)^2=(-6-p)^2+(-1-q)^2\\ -3p+q=-8\end{array}$$

Rešavamo sistem: $\begin{array}{l}-2p+4q=-17\\ -3p+q=-8\end{array}$, $p=\frac{3}{2}, q=-\frac{7}{2}, r^2=\frac{250}{4}$

Tražena kružnica:

$$(x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{7}{2})^2=\frac{250}{4} \Rightarrow x^2+y^2-3x+7y-48=0$$

d) Parabola i kružnica se seku u tačkama $M_1(9,-6)$ i $M_2(4,4)$.

U tački $M_1(9,-6)$ postavićemo tangentu na kružnicu.

Uslov dodira tangente i kružnice $r^2(k^2+1)=(kp-q+n)^2$

Rešavamo sistem:

$$\begin{cases}-6=9k+n\\ \frac{250}{4}(k^2+1)=(\frac{3}{2}k+\frac{7}{2}+n)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-6-9k=n\\ \frac{250}{4}(k^2+1)=(\frac{3}{2}k+\frac{7}{2}-6-9k)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}-6-9k=n\\ \frac{250}{4}(k^2+1)=(-\frac{15}{2}k-\frac{5}{2})^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-6-9k=n\\ k^2-6k+9=0\end{cases}$$

$k=3, n=-33$

Jednačina tangente je: $y=3x-33$

$k_{t_1}=-\frac{1}{3}$

$k_{t_1}\cdot k=-1 \Rightarrow$ ugao između tangenata je $90°$.

Dakle, kružnica i parabola se seku pod pravim uglom.

X VEKTORSKA ALGEBRA

Veličine koje su u potpunosti određene jednim brojem zovu se ***skalari*** (na primer: dužina, zapremina, temperatura).

Vektor je veličina određena pomoću tri karakteristike: pravca, smera, intenziteta (na primer: brzina, ubrzanje, sila).

Pojam vektora

Neka su u prostoru date dve tačke A i B koje određuju duž. Neka je A početna tačka duži, a B krajnja. Ovim je uvedena orijentacija duži AB.

Uredjeni par (A,B) zove se orijentisana duž ili ***vezani vektor*** i označava se $\overrightarrow{AB}$.

Rastojanje tačke A od tačke B zove se ***intenzitet*** vektora i označava se $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Prava na kojoj leži vektor $\overrightarrow{AB}$ zove se nosač ili ***pravac*** vektora.

Ako se početna i krajnja tačka vektora poklapaju, radi se o ***nula-vektoru*** $\vec{0}$. Njegov pravac i smer nisu određeni

U skupu orijentisanih duži može se uvesti relacija ekvivalencije:

Dve orijentisane duži $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su ekvivalentne ako su obe nula-vektori ili ako su iste dužine, pravca i smera.

Klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju ekvivalencije u skupu orijentisanih duži zove se **slobodni vektor** *ili kraće* **vektor**.

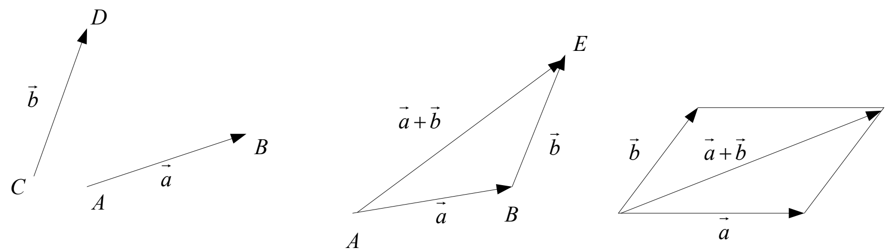
Moduo (intenzitet) vektora je dužina njegovog proizvoljnog predstavnika.

Skup svih vektora označava se sa V.

Operacije sa vektorima

Sabiranje vektora:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}$, gde je tačka E određena tako da je $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CD}$. Sabiranje vektora vrši se takođe po pravilu paralelograma.



Skup svih vektora sa operacijom sabiranja $(V,+)$ je komutativna grupa:

- Neutralan element operacije $+$ je nula-vektor $\vec{0}$.

- Kako je $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$, sledi da za svaki vektor $\overrightarrow{AB}$, postoji vektor $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$, koji je njegov inverzni element tj. ***suprotni vektor***.

Oduzimanje tj. ***razlika*** dva vektora defniše se sa:

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AE}$,

gde je tačka E određena tako da bude $\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{CD}$.

Napomena: Vektore osim velikim slovima (koja označavaju početnu i krajnju tačku vektora), često obeležavamo i malim slovima, na primer: $a,b,c,...$

Osobine operacije sabiranja vektora:

1) Zbir dva vektora je vektor: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$;

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

4) $(\forall\vec{a}\in V)(\exists-\vec{a})\ \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

5) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

$\Rightarrow (V,+)$ je komutativna grupa

Množenje vektora skalarom

Neka je $\alpha\in R,\vec{a}\in V$. Tada je $\alpha\vec{a}$ vektor čiji je intenzitet jednak $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, pravac

je jednak pravcu vektora $\vec{a}$, a smer je jednak smeru vektora $\vec{a}$, ako je $\alpha>0$, ili je suprotnog smera ako je $\alpha<0$:

$$\vec{a},\frac{1}{2}\vec{a},2\vec{a},-\frac{3}{2}\vec{a}$$

Osobine operacije množenja vektora skalarom:

1) $(\forall\vec{a})1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;

2) $(\forall\alpha,\beta\in R,\forall\vec{a}\in V)\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$

3) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

4) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

Definicija vektorskog prostora

Skup vektora sa operacijama sabiranja i množenja vektora brojem $(V,+,\cdot,R)$ predstavlja ***vektorski prostor nad poljem realnih brojeva***.

*Dva vektora, koji nisu nula-vektori, zovu se **kolinearni** ako imaju isti pravac. Kolinearni vektori zovu se i paralelni.*

Ako je $\vec{a}\neq 0$ i vektor $\vec{b}$ kolinearan sa $\vec{a}$, tada postoji realan broj λ takav da je $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

Linearna zavisnost

Neka su $\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n\in V$ i $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in R$. Vektor $\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n$ zove se linearna kombinacija vektora $\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n\in V$. Brojevi $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in R$ su koeficijenti linearne kombinacije.

*Vektori $\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n$ zovu se **linearno zavisni** ako postoje realni brojevi $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, koji nisu svi jednaki nuli, takvi da je:*

$$\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n=0.$$

U protivnom, ako iz uslova $\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n=0$ sledi $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$

*kaže se da su vektori **linearno nezavisni**.*

Dva vektora su linearno zavisna ako i samo ako su kolinearni.

*Vektori se zovu **komplanarni** ako pripadaju istoj ili paralelnim ravnima.*

Tri vektora $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ su linearno zavisna ako i samo ako su komplanarni.

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\chi\vec{c}=0\wedge\chi\neq 0\Rightarrow\vec{c}=-\frac{\alpha}{\chi}\vec{a}-\frac{\beta}{\chi}\vec{b}.$$

Svaka četiri vektora u prostoru su linearno zavisna.

Ako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tri proizvoljna nekomplanarna vektora, tada za proizvoljan vektor $\vec{d}$ postoje brojevi λ, μ, ν tako da je:

$$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \eta\vec{b} + \nu\vec{c}\,.$$

Maksimalan broj linearno nezavisnih vektora u nekom skupu vektora V zove se **baza** skupa V.

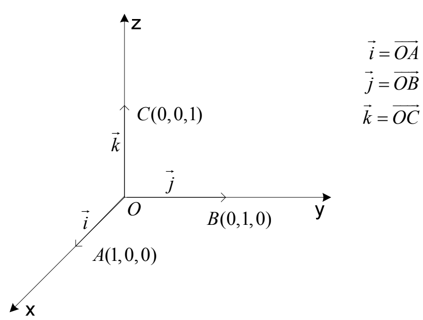
Svaka dva nekomplanarna vektora u ravni čine bazu u toj ravni.

Svaka tri nekomplanarna vektora u prostoru predstavljaju bazu u prostoru.

Vektori u Dekartovom koordinatnom sistemu

Neka je dat Dekartov koordinatni sistem sa osama x, y, z i koordinatnim početkom O. Uočimo tačke $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$.

Vektori $\vec{i} = \overrightarrow{OA}, \vec{j} = \overrightarrow{OB}, \vec{k} = \overrightarrow{OC}$ zovu se ***koordinatni vektori*** ili ***ortovi***. Ovi vektori su linearno nezavisni pa čine bazu u prostoru R^3.



Svakoj tački $M(a_x, a_y, a_z)$ u prostoru može se pridružiti vektor $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, koji se zove ***vektor položaja*** tačke M. Ovaj vektor može se na jedinstven način razložiti po bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{r} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,.$$

Na ovaj način uspostavlja se obostrano jednoznačna veza između vektora $\vec{r}$ i uređene trojke realnih brojeva $a_x, a_y, a_z \in R^3$. Pišemo $\vec{r} = (a_x, a_y, a_z)$, gde su a_x, a_y, a_z koordinate vektora $\vec{r}$ po bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ili Dekartove koordinate vektora $\vec{r}$.

Intenzitet vektora izračunava se relacijom:

$$\left|\vec{r}\right| = \left|\overline{OM}\right| \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

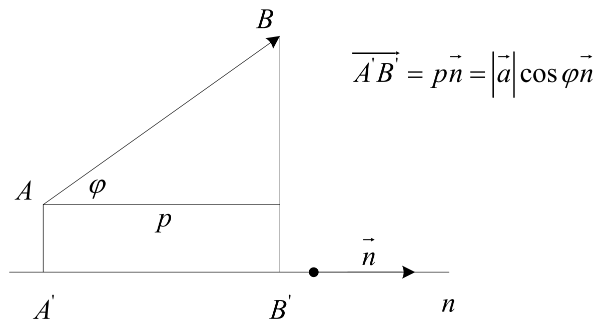
Sabiranje dva vektora

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$:

$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$

Projekcija vektora na osu

Dat je vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i prava n orijentisana jediničnim vektorom $\vec{n}$.



Veličina $p = \left|\overrightarrow{A'B'}\right| = |\vec{a}|\cos\varphi$ zove se projekcija vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ na pravu n i označava se sa:

$$p = pr_n\overrightarrow{AB}.$$

Skalarni proizvod dva vektora

Skalarni proizvod *dva vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *definiše se kao proizvod intenziteta vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *i kosinusa ugla koji obrazuju vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *i označava se sa* $\vec{a}\cdot\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$$

Skalarni proizvod dva vektora je broj (skalar).

S obzirom da je $\cos 90^o = 0$, na osnovu definicije skalarnog proizvoda sledi: **Ako su dva vektora međusobno ortogonalna, tada je njihov skalarni proizvod jednak nuli**, tj.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Veza između skalarnog proizvoda i projekcije:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| pr_{\vec{a}} \vec{b} = \left|\vec{b}\right| pr_{\vec{b}} \vec{a}$$

Osobine skalarnog proizvoda

Za svaka tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ važe sledeće relacije:

1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

4) $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a}(\alpha \vec{b}), \forall \alpha \in R$

5) $\vec{0} \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Skalarni proizvod preko koordinata

Neka su dati vektori $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ i $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$. Tada je njihov skalarni proizvod:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Ova formula proističe iz osobine 1) i iz činjenice da su koordinatni vektori međusobno ortogonalni, pa je prema tome:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 .$$

Primene skalarnog proizvoda

- Utvrđivanje ortogonalnosti dva vektora: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

- Određivanje intenziteta vektora:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}$$

- Određivanje ugla izmedju dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ preko kosinusa tog ugla:

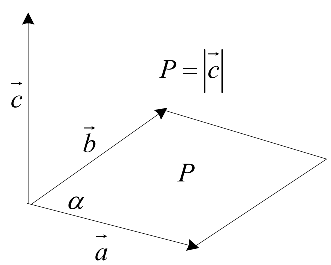
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

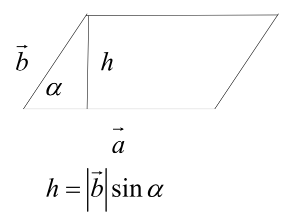
Vektorski proizvod dva vektora

Vektorski proizvod vektora $\vec{a}\ i\ \vec{b}$ je vektor $\vec{c}$, u oznaci $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, čiji je

- pravac određen normalom na ravan koju obrazuju vektori $\vec{a}\ i\ \vec{b}$;
- smer određen po pravilu desnog zavrtnja;
- intenzitet jednak

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$$





Geometrijski posmatrano, **intenzitet vektorskog proizvoda dva vektora jednak je površini paralelograma koji je određen ovim vektorima**, što se može videti i sa napred navedene slike. Naime, imamo:

$$P = \left|\vec{a}\right| h = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\alpha = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

Ako su $\vec{a}\ i\ \vec{b}$ kolinearni vektori, tada je $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0$

Osobine vektorskog proizvoda:

Za svaka tri vektora $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ važe sledeće relacije:

1) $\vec{a}\times\vec{a} = 0$

2) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

4) $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b}),\forall\alpha\in R$.

Na osnovu gornje teoreme i definicije, za koordinatne vektore važi:

$$\vec{i}\times\vec{i}=0,\vec{j}\times\vec{j}=0,\vec{k}\times\vec{k}=0$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$

Vektorski proizvod preko koordinata

Neka su dati vektori $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ i $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$. Tada se njihov vektorski proizvod može simbolički napisati preko determinante

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}(a_yb_z-a_zb_y)-\vec{j}(a_xb_z-a_zb_x)+\vec{k}(a_xb_y-a_yb_x).$$

Mešoviti proizvod tri vektora

Neka su data tri vektora $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Ako najpre vektorski pomnožimo vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, odnosno odredimo vektor $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$, a zatim tako dobijeni vektor pomnožimo skalarno sa vektorom $\vec{c}$, dobijamo **mešoviti proizvod** tri vektora:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

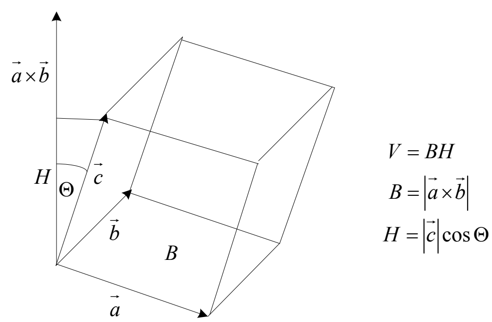
Napomena: Ne postoji proizvod $(\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c}$ ili $\vec{a}\times(\vec{b}\cdot\vec{c})$, jer je skalarni proizvod dva vektora skalar, a vektorski proizvod je moguć samo izmedju dva vektora.

Ako su vektori zadati preko koordinata, tada se mešovit proizvod izračunava pomoću determinante:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

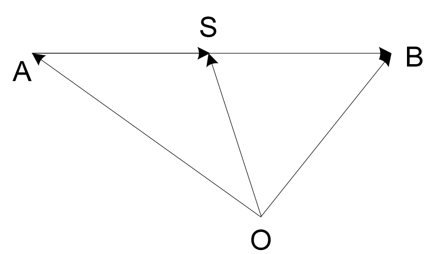
Vektori $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ su komplanarni ako i samo ako je njihov mešovit proizvod jednak nuli.

Ako vektori $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ nisu komplanarni, tada je apsolutna vrednost njihovog mešovitog proizvoda jednaka zapremini paralelopipeda koji ovi vektori obrazuju.



77. Ako je S središte duži AB i O proizvoljna tačka, dokazati da je vektor $\overrightarrow{OS} = \dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$.

Rešenje:



Iz ΔAOS i ΔBOS zaključujemo da je:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS}$$
$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BS}$$

Ako saberemo napred navedene jednakosti dobićemo:

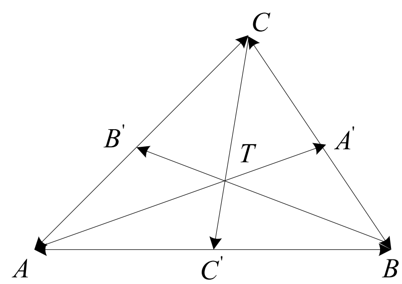
$2\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \cancel{\overrightarrow{AS}} + \overrightarrow{OB} + \cancel{\overrightarrow{BS}}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} = \vec{0}$, jer su $\overrightarrow{AS}$ i $\overrightarrow{BS}$ suprotni vektori.

$2\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

78. Ako su AA', BB' i CC' težišne duži trougla ABC dokazati da je $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Rešenje:



$$\overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

$$\overrightarrow{BB'} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}}{2}$$

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}}{2}$$

Ako saberemo napred navedene jednakosti dobićemo:

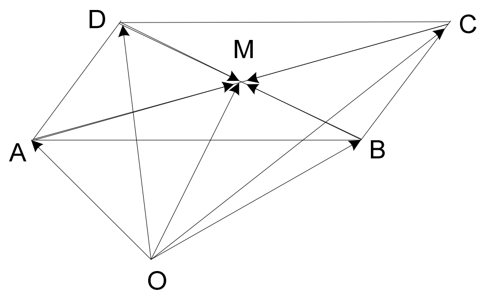
$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}(\cancel{\overrightarrow{AB}} + \cancel{\overrightarrow{AC}} + \cancel{\overrightarrow{BC}} + \cancel{\overrightarrow{BA}} + \cancel{\overrightarrow{CB}} + \cancel{\overrightarrow{CA}})$$

$\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CB}$ se potiru kao suprotni vektori, pa sledi:

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2} \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

79. Neka je M presečna tačka dijagonala paralelograma $ABCD$, a O proizvoljna tačka (van četvorougla). Dokazati da je $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Rešenje:



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DM}$

Ako saberemo napred navedene jednakosti dobićemo:

$4\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \cancel{\overrightarrow{AM}} + \overrightarrow{OB} + \cancel{\overrightarrow{BM}} + \overrightarrow{OC} + \cancel{\overrightarrow{CM}} + \overrightarrow{OD} + \cancel{\overrightarrow{DM}}$

$\overrightarrow{AM}$ i $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{BM}$ i $\overrightarrow{DM}$ se potiru kao suprotni vektori, pa dobijamo:

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

80. Ako su i i j jedinični vektori, odrediti parametar m tako da vektori $\vec{x} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{y} = m\vec{i} - \vec{j}$ budu kolinearni.

Rešenje:

$\vec{x} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

$\vec{y} = m\vec{i} - \vec{j}$

$m = ?$

Ako je $\vec{x} \neq 0$ i vektor $\vec{y}$ kolinearan sa $\vec{x}$, tada postoji realan broj k takav da je $\vec{x} = k\vec{y}$. Zamenom zadatih $\vec{x}$ i $\vec{y}$ dobijamo:

$2\vec{i}+3\vec{j}=k(m\vec{i}-\vec{j})$
$2\vec{i}+3\vec{j}=km\vec{i}-\overrightarrow{kj}$

Izjednačavanjem levih i desnih strana jednakosti imamo:

$km=2$
$k=-3$

$-3m=2$
$m=-\frac{2}{3}$

81. Za koje α vektori $\vec{a}(2,3,-4)$ i $\vec{b}(\alpha,-6,8)$ su paralelni?

Rešenje:

Ako je $\vec{a}\neq 0$ i vektor $\vec{b}$ kolinearan tj. paralelan sa $\vec{a}$, tada postoji realan broj λ takav da je $\vec{a}=\lambda\vec{b}$. Zamenom zadatih $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dobijamo:

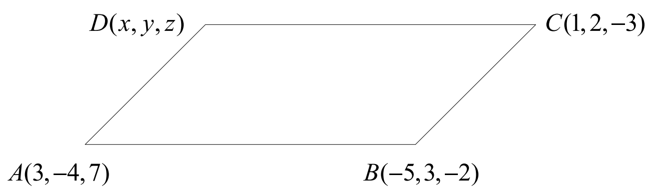
$(2,3,-4)=k(\alpha,-6,8)$
$(2,3,-4)=(\alpha k,-6k,8k)$

Izjednačavanjem levih i desnih strana jednakosti imamo:

$k\alpha=2$
$-6k=3\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$
$8k=-4\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$
$\Rightarrow$
$k\alpha=2,k=-\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=-4$

82. Data su temena $A(3,-4,7)$, $B(-5,3,-2)$ i $C(1,2,-3)$ paralelograma $ABCD$. Naći koordinate četvrtog temena D.

***Rešenje**:*



Pretpostavimo da teme D ima koordinate $D(x, y, z)$.

Onda su koordinate vektora $\overrightarrow{AD}$ jednake:

$\overrightarrow{AD} = (x-3, y+4, z-7)$.

Sa druge strane, vektori $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AD}$ su međusobno jednaki, pa sledi:

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (1-(-5), 2-3, -3-(-2)) = (6,-1,-1)$.

Iz napred navedenog dolazimo do sledeće jednakosti vektora:

$\overrightarrow{AD} = (x-3, y+4, z-7) = (6,-1,-1)$ tj.

$$\begin{cases} x-3=6 \\ y+4=-1 \\ z-7=-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$x=9$

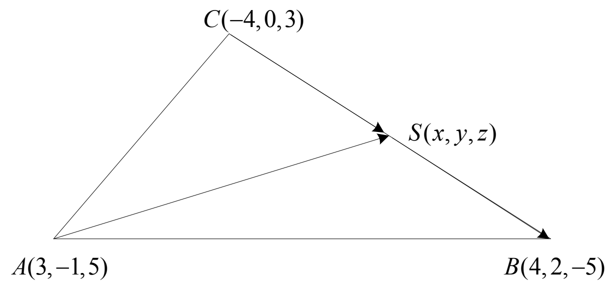
$y=-5$

$z=6$

Dakle, koordinate temena D su: $D(9,-5,6)$.

83.Data su temena trougla $ABC: A(3,-1,5)$, $B(4,2,-5)$ i $C(-4,0,3)$. Odrediti dužinu težišne duži iz temena A.

***Rešenje**:*



$A(3,-1,5)$

$B(4,2,-5)$

$C(-4,0,3)$

Pretpostavimo da središte duži CB, S, ima koordinate $S(x,y,z)$.

$\left|\overrightarrow{AS}\right| = ?$

Pošto je S središte duži CB, imamo da je $\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{SB}$.

$\overrightarrow{CS} = (x+4, y, z-3)$

$\overrightarrow{SB} = (4-x, 2-y, -5-z)$

Iz tri napred navedene jedakosti imamo:

$(x+4, y, z-3) = (4-x, 2-y, -5-z)$ tj.

$x+4 = 4-x$

$y = 2-y$

$z-3 = -5-z$

$\Rightarrow$

$x = 0$

$y = 1$

$z = -1$

Dakle, koordinate vektora $\overrightarrow{AS}$ su: $\overrightarrow{AS}(-3,2,-6)$, a njegov intenzitet:

$\left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+4+36}$

$\left|\overrightarrow{AS}\right| = 7$.

84. Naći ugao između vektora $\vec{a}-\vec{b}$ i $\vec{a}+\vec{b}$ ako je $\vec{a}=(1,2,1)$ i $\vec{b}=(2,-1,0)$.

Rešenje:

$\vec{a}=(1,2,1)$

$\vec{b}=(2,-1,0)$

$\angle(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+\vec{b})=?$

Radi jednostavnosti, obeležimo razliku vektora $\vec{a}-\vec{b}$ sa $\overrightarrow{m}$, a zbir $\vec{a}+\vec{b}$ sa $\overrightarrow{p}$.

$\overrightarrow{m}=\vec{a}-\vec{b}=(-1,3,1)$

$\overrightarrow{p}=\vec{a}+\vec{b}=(3,1,1)$.

Iz primene skalarnog proizvoda imamo da je:

$$\cos\angle(\overrightarrow{m},\overrightarrow{p})=\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{p}}{\left|\overrightarrow{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{p}\right|}=\frac{m_x p_x+m_y p_y+m_z p_z}{\sqrt{m_x^2+m_y^2+m_z^2}\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2}} \quad \text{tj.}$$

$$\cos\angle(\overrightarrow{m},\overrightarrow{p})=\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{p}}{\left|\overrightarrow{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{p}\right|}=\frac{(-1)\cdot 3+3\cdot 1+1\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2+3^2+1^2}\sqrt{3^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{11}$$

$$\angle(\overrightarrow{m},\overrightarrow{p})=\arccos\frac{1}{11}$$

$$\angle(\overrightarrow{m},\overrightarrow{p})\approx 85^\circ \qquad \text{tj.}$$

$$\angle(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+\vec{b})\approx 85^\circ.$$

85. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ obrazuju ugao $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$. Zna se da su intenziteti vektora $\left|\vec{a}\right|=3$ i $\left|\vec{b}\right|=4$. Izračunati $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$.

Rešenje:

$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=$

$=3\left|\vec{a}\right|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-4\left|\vec{b}\right|^2=$

$=3\left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}-4\left|\vec{b}\right|^2=$

$=3\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0°+4\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\frac{2\pi}{3}-4\left|\vec{b}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 0°=$

$=3\cdot 3\cdot 3\cdot 1+4\cdot 3\cdot 4\cdot(-\frac{1}{2})-4\cdot 4\cdot 4\cdot 1=$

$=-61.$

86. Vektor $\vec{m}$ zadovoljava uslove:

- kolinearan je sa vektorom $\vec{a}(6,-8,-7.5)$,
- njegova dužina je 50 i
- određuje oštar ugao sa osom z.

Odrediti koordinate vektora $\vec{m}$.

Rešenje:

$\vec{a}(6,-8,-7.5)$

$\left|\vec{m}\right|=50$

$\vec{m}(x,y,z)=?$

Ako je $\vec{m}\neq 0$ i vektor $\vec{a}$ kolinearan sa $\vec{m}$, tada postoji realan broj k takav da je $\vec{m}=k\vec{a}$.

Zamenom vektora $\vec{m}$ i $\vec{a}$ preko koordinata u prethodno navedenu jednakost dobijamo:

$(x,y,z)=k(6,-8,-7.5)\Rightarrow$

$$\begin{cases} x=6k \\ y=-8k \\ z=-7.5k \end{cases} \quad \text{...} \quad (1)$$

Drugi uslov dat u zadatku je $\left|\vec{m}\right|=50$ tj.

$\left|\vec{m}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=50$ .... (2)

Zamenom (1) u (2) dobijamo:

$$\sqrt{(6k)^2+(-8k)^2+(-7.5)^2}=50$$

$$12.5k=50$$

$$\Rightarrow k=4$$

Ako zamenimo vrednost $k=4$ u (1) dobićemo vrednosti koordinata vektora $\overrightarrow{m}$:

$$\begin{cases} x=6k=6\cdot 4=24 \\ y=-8k=-8\cdot 4=-32 \\ z=-7.5k=-7.5\cdot 4=-30 \end{cases}$$

tj. koordinate vektora $\overrightarrow{m}$ su: $\overrightarrow{m}(24,-32,-30)$.

87. Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}(1,1,-1)$ i $\vec{b}(1,-1,2)$.

Rešenje:

Pošto je intenzitet vektorskog proizvoda dva vektora jednak površini paralelograma koji je određen ovim vektorima, imaćemo:

$$P=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} =$$

$$=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}-\vec{k}-\vec{i}-2\vec{j}=$$

$$=\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$$

$$P=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$$

88. Dati su vektori $\vec{a}(1,1,-1)$, $\vec{b}(-2,-1,2)$ i $\vec{c}(1,-1,2)$. Razložiti vektor $\vec{c}$ u komponente po pravcima vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$.

***Rešenje**:*

$\vec{a}(1,1,-1)$

$\vec{b}(-2,-1,2)$

$\vec{c}(1,-1,2)$

$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} + p(\vec{a}\times\vec{b})$

$m, n, p = ?$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{matrix} \quad = 2\vec{i} \cancel{+2\vec{j}} - \vec{k} + 2\vec{k} - \vec{i} \cancel{-2\vec{j}} = \vec{i} + \vec{k}\ .$$

$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ tj. $\vec{a}\times\vec{b} = (1,0,1)$

$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} + p(\vec{a}\times\vec{b})$

$(1,-1,2) = m(1,1,-1) + n(-2,-1,2) + p(1,0,1)$

$(1,-1,2) = (m-2n+p, m-n, -m+2n+p)$

Dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{cases} m-2n+p=1 \\ m-n=-1 \\ -m+2n+p=2 \end{cases}$$

sa rešenjima :

$m = -\dfrac{3}{2}$

$n = -\dfrac{1}{2}$

$p = \dfrac{3}{2}$

Razloženi vektor po traženim pravcima će glasiti:

$\vec{c} = -\dfrac{3}{2}\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b} + \dfrac{3}{2}(\vec{a}\times\vec{b})$.

89. Izračunati površinu trougla ako su date koordinate njegovih temena: $A(2,-3,4)$, $B(1,2,-1)$ i $C(3,-2,1)$.

Rešenje:

Ako se trougao ABC transformiše u paralelogram $ABCD$, tada je:

$P_{ABC} = \frac{1}{2} P_{ABCD}$, pa je:

$P_{ABC} = \frac{1}{2} P_{ABCD} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$.

Najpre ćemo odrediti koordinate vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = (1-2, 2-(-3), (-1)-4) = (-1,5,-5)$

$\overrightarrow{AC} = (3-2, -2-(-3), 1-4) = (1,1,-3)$,

a zatim njihov vektorski proizvod:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ AB_x & AB_y & AB_z \\ AC_x & AC_y & AC_z \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ -1 & 5 & -5 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right. \quad = -15\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k} - 5\vec{k} + 5\vec{i} - 3\vec{j} = -10\vec{i} - 8\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} P_{ABCD} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{(-10)^2 + (-8)^2 + (-6)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{200} = 5\sqrt{2}$$

90.Pokazati da su vektori $\vec{a}(-1,3,2)$, $\vec{b}(2,-3,-4)$ i $\vec{c}(-3,12,6)$ komplanarni i odrediti njihovu linearnu zavisnost.

Rešenje:

Po već navedenoj teoremi, vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su komplanarni ako i samo ako je njihov mešovit proizvod jednak nuli. Dakle, treba dokazati da je mešoviti proizvod zadatih vektora jednak nuli.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -4 & 2 & -3 \\ -3 & 12 & 6 & -3 & 12 \end{array} \right. \quad = \cancel{18} + \cancel{36} + \cancel{48} - \cancel{18} - \cancel{48} - \cancel{36} = 0.$$

Pošto je mešoviti proizvod zadatih vektora jednak nuli, zaključujemo da su oni komplanarni.

Da bi smo odredili linearnu zavisnost ova tri vektora, napisaćemo, najpre,vektor $\vec{a}$ preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$ na sledeći način:

$\vec{a} = k_1\vec{b} + k_2\vec{c}$,

a zatim izračunati koeficijente k_1 i k_2.

$$\vec{a} = k_1\vec{b} + k_2\vec{c}$$

$$(-1,3,2) = k_1(2,-3,-4) + k_2(-3,12,6)$$

$$(-1,3,2) = (2k_1 - 3k_2, -3k_1 + 12k_2, -4k_1 + 6k_2).$$

Dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{cases} 2k_1 - 3k_2 = -1 \\ -3k_1 + 12k_2 = 3 \\ -4k_1 + 6k_2 = 2 \end{cases}$$

Rešavanjem sistema sledi:

$$k_1 = -\frac{1}{5}$$

$$k_2 = \frac{1}{5}$$

Određivanjem koeficijenata k_1 i k_2 dobili smo i linearnu zavisnost traženih vektora:

$$\vec{a} = -\frac{1}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}.$$

91. Ivice tetraedra su vektori $\vec{a}(1,2\alpha,1)$, $\vec{b}(2,\alpha,\alpha)$ i $\vec{c}(3\alpha,2,-\alpha)$, $\alpha \in R$ i $\alpha \neq 0$.

a) Odrediti zapreminu tetraedra.

b) Odrediti parametar $\alpha \in R$, tako da su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni.

***Rešenje**:*

a) Na osnovu teoreme imamo da ako vektori $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ nisu komplanarni, tada je apsolutna vrednost njihovog mešovitog proizvoda jednaka zapremini paralelopipeda koji ovi vektori obrazuju.

Zapremina tetraedra konstruisanog nad ovim vektorima jednaka je šestini zapremine paralelopipeda, tj.:

$$V_{tetraedra} = \frac{1}{6} V_{paralelopipeda}$$

$$V_{paralelopipeda} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2\alpha & 1 \\ 2 & \alpha & \alpha \\ 3\alpha & 2 & -\alpha \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2\alpha \\ 2 & \alpha \\ 3\alpha & 2 \end{matrix} = -\alpha^2 + 6\alpha^3 + 4 - 3\alpha^2 - 2\alpha + 4\alpha^2$$

$$= 6\alpha^3 - 2\alpha + 4$$

$$V_{tetraedra} = \frac{1}{6} V_{paralelopipeda} = \frac{1}{6}(6\alpha^3 - 2\alpha + 4) .$$

b) Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su komplanarni ako i samo ako je njihov mešovit proizvod jednak nuli. Sledi:

$$6\alpha^3 - 2\alpha + 4 = 0$$

$$6\alpha^3 - 2\alpha + 6 - 2 = 0$$

$$6\alpha^3 + 6 - 2\alpha - 2 = 0$$

$$6(\alpha^3 + 1) - 2(\alpha + 1) = 0$$

$$6(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) - 2(\alpha + 1) = 0$$

$$2(\alpha + 1)(3\alpha^2 - 3\alpha + 3 - 1) = 0$$

$$2(\alpha + 1)(3\alpha^2 - 3\alpha + 2) = 0$$

$$\begin{matrix} \\ \alpha + 1 = 0 \\ \alpha = -1 \\ \\ \end{matrix} \quad \wedge \quad \begin{matrix} 3\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \\ \alpha_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 24}}{6} \\ \alpha \notin R \end{matrix}$$

PRIMER TESTA SA PRIJEMNOG ISPITA 2008.GODINE

1. Uprostiti izraz:

   $$\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{2^x-2^{-x}}{2}\right)^2$$

2. Rešiti jednačinu:

   $$(2x-3)^2+(2x-5)^2=4(x-3)^2+30$$

3. Izračunati vrednost izraza:

   $$3\log_5 25+2\log_3 27-4\log_2 8$$

4. Dokazati sledeći identitet:

   $$\frac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{1+ctg^2\alpha}{1-ctg^2\alpha}$$

5. Koliko je kvadratnih metara metalnog lima potrebno za izradu cilindričnog dimnjaka visine 18m i prečnika 65cm.

PRIMER TESTA SA PRIJEMNOG ISPITA 2009.GODINE

1. Uprostiti izraz

$$\frac{a^2-a-6}{a^2-4}-\frac{a-1}{2-a}-2$$

2. Odrediti realna rešenja sledeće jednačine:

$$\sqrt{25-x^2}=7-x$$

3. Izračunati:

$$5\sqrt{2}+3\sqrt{8}-\sqrt{50}-\sqrt{98}$$

4. Dokazati sledeći identitet:

$$1-\frac{\sin^2\alpha}{1+ctg\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{1+tg\alpha}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

5. Date su osnovna ivica $a=10cm$ i visina $H=12cm$ pravilne četvorostrane piramide. Odrediti njenu površinu i zapreminu.

PRIMER TESTA SA PRIJEMNOG ISPITA 2010.GODINE

1. Uprostiti izraze:

a) $\dfrac{a^2-ab}{a^2+ab}\cdot\dfrac{a^2b+ab^2}{ab}$

b) $\dfrac{4x^2y^2}{15b^3c}:\dfrac{8x^3y^3}{5c^2b^2}$

2. Rešiti jednačinu:

$$\frac{1+3x}{3x-1}+\frac{1-3x}{1+3x}=\frac{12}{1-9x^2}$$

3. Ako je $A=\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}$ i $B=\left(\dfrac{a^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}-\dfrac{b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)\left(a^{-1}-b^{-1}\right)\left(a^{-2}+b^{-2}\right)^{-1}$

dokazati da je $A=B^{-1}$

4. Rešiti jednačinu:

$$\log_x(5x^2)\cdot\log_5^2 x=1$$

5. Pravilna četvorostrana prizma ima omotač 8m² i dijagonalu 3m. Izračunati njenu zapreminu.

PRIMER TESTA SA PRIJEMNOG ISPITA 2010.GODINE (septembar)

1. Uprostiti izraz:

$$\frac{27x^{-2}y^{-3}}{3^2x^{-4}y^2}$$

2. Rešiti jednačinu:

$$\frac{2x}{x-9}-\frac{x^2+25}{x^2-81}=\frac{5}{x+9}-\frac{5}{x-9}$$

3. Dokazati sledeći identitet:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

4. Visina kupe je 12cm, a površina osnog preseka je 42 cm^2. Odrediti površinu osnove i izvodnicu kupe.

5. Pravilna četvorostrana prizma ima omotač 8m^2 i dijagonalu 3m. Izračunati njenu zapreminu.

LITERATURA:

Vene Bogoslavov, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 1*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1996.

Vene Bogoslavov, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 2*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1996.

Vene Bogoslavov, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 3*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1998.

Jovan Kečkić, *Matematika sa zbirkom zadataka za III razred srednje škole*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1999.

Živorad Ivanović, Srđan Ognjanović, *Matematika 2, zbirka zadataka i testova za II razred gimnazija i tehničkih škola*, Krug, Beograd, 1999.

Živorad Ivanović, Srđan Ognjanović, *Matematika 3, zbirka zadataka i testova za III razred gimnazija i tehničkih škola,* Krug, Beograd, 1999.

http://en.wikipedia.org

http://www.mycity.rs/Matematika/Matematika-Geometrija.html